រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន
បរិញ្ញាបត្រផ្នែក គណិតវិទ្យា

សិក្សាអនុគមន៍

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១២

ដេរីវេ-ចំណោទបរមា-សិក្សាអនុគមន៍

មេរៀនសង្ខេប និង លំហាត់គំរូ

2013

គ្រាសិទ្ធិ

សិក្សាអនុគមន៍

សម្រាប់ថ្នាក់ទី១២

គណៈកម្មការរៀបរៀង និង និពន្ធ

លោក **លឹម ផល្គុន** លោក **សែន ពិសិដ្ឋ**

លោក **យ៉ង់ ឆារី** លោក **អ៊ឹង សំណាង**

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក **អ៊ឹង សំណាង** លោក **យ៉ង់ ឆារី**

លោក **សែន ពិសិដ្ឋ**

អ្នករចនាក្រប

លោក **លឹម ផល្គុន**

បច្ចេកទេសកុំព្យូទ័រ

លោក **អ៊ឹង សំណាង** លោក **លឹម ផល្គុន**

អ្នកត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក **លឹម មិត្តសិរ** យុវសិស្ស **យន វ៉ាន់នី**

អារម្ភកថា

សួស្តីប្រិយមិត្តអ្នកសិក្សាជាទីស្រឡាញ់រាប់អាន ! សៀវភៅសិក្សាអនុគមន៍ថ្នាក់ ទី ១២ ដែលអ្នកសិក្សាកំពុងតែកាន់អាននៅក្នុងដៃនេះ យើងខ្ញុំអ្នកនិពន្ធ និង រៀបរៀងឡើងទុកជាឯកសាសម្រាប់សិស្សថ្នាក់ទី១២ ចង់យល់ដឹងលើមេរៀនផ្នែក ដេរីវេ និង សិក្សាអនុគមន៍ដើម្បីជាជំនួយក្នុងការអានសៀវភៅនេះ យើងខ្ញុំអ្នករៀបរៀងបានបែងចែកសៀវភៅនេះជាបួនជំពូក ។ ជំពូកទី១ ជាមេរៀនសង្ខេប ជំពូកទី២ ជាផ្នែកអនុវត្តន៍ និង ជំពូកទី៣ ជាផ្នែកលំហាត់មានដំណោះស្រាយ និង ជំពូកទី៣ ជាផ្នែកលំហាត់អនុវត្តន៍ ។

ជាចុងបញ្ចប់យើងខ្ញុំអ្នករៀបរៀងសង្ឃឹមថា សៀវភៅនេះនឹងអាចចូលរួមចំណែកពង្រឹងចំណេះដឹងនិងពង្រីកការចាប់អារម្មណ៍ក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យាជាក់ជាមិនខាន។

បាត់ដំបង ថ្ងៃទី ១៨ ខែមីនា ឆ្នាំ ២០១៣

អ្នករៀបរៀង **លឹម ផល្គុន**

Tel : (017) 768 246

មាតិការឿង

ជំពូកទី៣

សិក្សាអនុគមន៍ និង ក្រាហ្វិក

១-សិក្សាអនុគមន៍រាង $y = ax^2 + bx + c$

២-សិក្សាអនុគមន៍រាង $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

៣-សិក្សាអនុគមន៍រាង $y = \sqrt{ax+b}$

៤-សិក្សាអនុគមន៍រាង $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

៥-សិក្សាអនុគមន៍រាង $y = ax^4 + bx^2 + c$

៦-សិក្សាអនុគមន៍រាង $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$

៧-សិក្សាអនុគមន៍រាង $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$

៨-សិក្សាអនុគមន៍រាង $y = \dfrac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{(\alpha x + \beta)^2}$

៩-សិក្សាអនុគមន៍រាង $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$

ជំពូកទី៤

លំហាត់មានដំណោះស្រាយ

ជំពូកទី៥

លំហាត់អនុវត្តន៍

ជំពូកទី១

ដេរីវេនៃអនុគមន៍

១-អត្រាបម្រែបម្រួល

និយមន័យ ៖

គេឲ្យអនុគមន៍ $y=f(x)$ មានក្រាបតំណាង (C) ។

បើអថេរ x ប្រែប្រួលពី x_1 ទៅ x_2 នោះអនុគមន៍ $y=f(x)$

ប្រែប្រួលពី $f(x_1)$ ទៅ $f(x_2)$ នោះគេបានផលធៀប $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

កំណត់ដោយ $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ហៅថាអត្រាបម្រែបម្រួល

មធ្យមនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ពី x_1 ទៅ x_2 ។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យអនុគមន៍ $y=x^2-3\sqrt{x}+4$ ។

រកអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមនៃអនុគមន៍ពី $x_1=1$ ទៅ $x_2=4$ ។

គេមាន $f(1)=1-3+4=2$ និង $f(4)=16-6+4=14$

គេបាន $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{14-2}{4-1}=\frac{12}{3}=4$ ។

ដូចនេះ $\frac{\Delta y}{\Delta x}=4$ ។

២-ដេរីវេត្រង់ចំណុចមួយ

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=f\left(x\right)$ ត្រង់ចំណុច $x=x_0$ (បើមាន)

កំណត់ដោយ $f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_o}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$

ឬ $f'\left(x_0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$ ដែល $x=x_0+h$ ។

ឧទាហរណ៍១ គេឲ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=x^3-2x^2+3$

ចូរគណនា $f'(2)$?

គេបាន $f'(x)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^3-2x^2+3)-(2^3-2\times 2^2+3)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(x^2\right)=4$$

ដូចនេះ $f'(2)=4$ ។

ឧទាហរណ៍២ គេឲ្យ $f(x)=x^2+2x+5$ ។ គណនា $f'(1)$?

គេបាន $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2+2(1+h)+5-1-2-5}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(h+4\right)=4$$

ដូចនេះ $f'(1)=4$ ។

៣-ដេរីវេលើចន្លោះមួយ

និយមន័យ ៖

អនុគមន៍ f មានដេរីវេលើចន្លោះ I លុះត្រាតែវាមានដេរីវេត្រង់គ្រប់ចំណុច $x \in I$ ។

គេកំណត់សរសេរ $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = x^n$, $n \in IN$

ចូរស្រាយថា $f'(x) = nx^{n-1}$ គ្រប់ $x \in IR$ ។

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[(x+\Delta x) - x\right]\left[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + ... + x^{n-1}\right]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + ... + x^{n-1}\right]$$

$$= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + ... + x^{n-1}}_{(n)} = nx^{n-1}$$

ដូចនេះ $f'(x) = nx^{n-1}$ គ្រប់ $x \in IR$ ។

សម្គាល់

បើគេតាង $\Delta x = h$ ដែល $\Delta x \to 0$ នោះ $h \to 0$

គេបាន $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ។

៤-រូបមន្តដេរីវេ

អនុគមន៍	ដេរីវេ
1) $y = a$ (a ចំនួនថេរ)	$y' = 0$
2) $y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
3) $y = ax^n$	$y' = nax^{n-1}$
4) $y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5) $y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
6) $y = \frac{a}{x^n}$	$y' = -\frac{na}{x^{n+1}}$
7) $y = \sqrt{ax+b}$	$y' = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$
8) $y = (ax+b)^n$	$y' = na(ax+b)^{n-1}$
9) $y = \frac{1}{ax+b}$	$y' = -\frac{a}{(ax+b)^2}$
10) $y = u + v - w$	$y' = u' + v' - w'$
11) $y = u^n$	$y' = nu'u^{n-1}$
12) $y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
13) $y = uv$	$y' = u'v + uv'$
14) $y = uvw$	$y' = u'vw + uv'w + uvw'$

15) $y=\frac{u}{v}$ $\quad y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

16) $y=\frac{1}{v}$ $\quad y'=-\frac{v'}{v^2}$

17) $y=e^x$ $\quad y'=e^x$

18) $y=e^{ax}$ $\quad y'=ae^{ax}$

19) $y=\ln x$ $\quad y'=\frac{1}{x}$

20) $y=\ln(ax+b)$ $\quad y'=\frac{a}{ax+b}$

21) $y=\sin x$ $\quad y'=\cos x$

22) $y=\sin(ax)$ $\quad y'=acos(ax)$

23) $y=\cos x$ $\quad y'=-\sin x$

24) $y=\cos(ax)$ $\quad y'=-a\sin(ax)$

25) $y=\tan x$ $\quad y'=\frac{1}{\cos^2 x}$

26) $y=\tan(ax)$ $\quad y'=\frac{a}{\cos^2(ax)}$

27) $y=\cot x$ $\quad y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$

28) $y=\cot(ax)$ $\quad y'=-\frac{a}{\sin^2(ax)}$

29) $y=\arcsin x$ $\quad y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

30) $y = \arccos x$ $\qquad y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

31) $y = \arctan x$ $\qquad y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

32) $y = arc\cot x$ $\qquad y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

33) $y = e^u$ $\qquad y' = u'e^u$

34) $y = \ln u$ $\qquad y' = \dfrac{u'}{u}$

35) $y = \sin u$ $\qquad y' = u'\cos u$

36) $y = \cos u$ $\qquad y' = -u'\sin u$

37) $y = \tan u$ $\qquad y' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

38) $y = \cot u$ $\qquad y' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

39) $y = \arcsin u$ $\qquad y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

40) $y = \arccos u$ $\qquad y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

41) $y = \arctan u$ $\qquad y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

42) $y = arc\cot u$ $\qquad y' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

43) $y = u^v$ $\qquad y' = \left(v'\ln u + v\dfrac{u'}{u}\right)u^v$

លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

I-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

1) $y=\frac{2}{3}x^{12}+\frac{3}{4}x^{8}+7$

គេបាន $y'=\frac{2}{3}\times 12x^{11}+\frac{3}{4}\times 8x^{7}=8x^{11}+6x^{7}$ ។

2) $y=2\sqrt{x}-\frac{3}{x}+\ln x$

គេបាន $y'=2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}$ ។

3) $y=\frac{1}{12}\left(x^4+4x+1\right)^3$

គេបាន $y'=\frac{1}{12}\times 3(x^4+4x+1)'(x^4+4x+1)^2$

$=(x^3+1)(x^4+4x+1)^2$ ។

4) $y=\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$

គេបាន $y'=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})'}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}$

$=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{2\sqrt{x^2+1}\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x^2+1}}$

ដូចនេះ $y'=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x^2+1}}$ ។

5) $y=\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$

គេបាន $y'=\dfrac{(x^2-4x)'(x^2-4x+3)-(x^2-4x+3)'}{(x^2-4x+3)^2}$

$$=\frac{(2x-4)(x^2-4x+3)-(2x-4)(x^2-4x)}{\left(x^2-4x+3\right)^2}$$

$$=\frac{(2x-4)\left[(x^2-4x+3)-(x^2-4x)\right]}{\left(x^2-4x+3\right)^2}$$

$$=\frac{6x-12}{\left(x^2-4x+3\right)^2}$$

6) $y=\dfrac{1}{3(x^3-3x+4)}$

គេបាន $y'=-\dfrac{(x^3-3x+4)'}{3(x^3-3x+4)^2}=-\dfrac{3x^2-3}{3(x^3-3x+4)^2}$

$$=-\frac{x^2-1}{\left(x^3-3x+4\right)^2}=\frac{(1-x)(1+x)}{\left(x^3-3x+4\right)^2}$$

7) $y=x^5\left(x^4+1\right)$

គេបាន $y'=(x^5)'\left(x^4+1\right)+(x^4+1)'\,x^5$

$$=5x^4(x^4+1)+4x^3.x^5$$

$$=5x^8+5x^4+4x^8$$

$$=x^4(9x^4+5)$$

II-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

$a)\ y = 2x^2 - 3x + 1$ $\quad b)\ y = x^5 + x^3 + 2$

$c)\ y = x^3 - 3x + 2$ $\quad d)\ y = x^4 - 3x^3 + 4$

$e)\ y = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$ $\quad f)\ y = x^7 + 7x$

ដំណោះស្រាយ

$a)\ y = 2x^2 - 3x + 1$ នោះ $y' = 4x - 3$

$b)\ y = x^5 + x^3 + 2$ នោះ $y' = 5x^4 + 3x^2 = x^2(5x^2 + 3)$

$c)\ y = x^3 - 3x + 2$ នោះ $y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$

$d)\ y = x^4 - 3x^3 + 4$ នោះ $y' = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3)$

$e)\ y = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$ នោះ

$y' = 2 + 6x + 12x^2 + 20x^3$

$f)\ y = x^7 + 7x$ នោះ $y' = 7x^6 + 7 = 7(x^6 + 1)$

III-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ ៖

$a)\ y = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$ $\quad b)\ y = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x^4} - \frac{x^3}{3}$

$c)\ y = \left(x^2 + x\right)^3$ $\quad d)\ y = (x^2 + 1)^4$

$e)\ y = \sqrt{x^2 - 4x}$ $\quad f)\ y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$

ដំណោះស្រាយ

$a)\ y = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$ នោះ $y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^4}$

b) $y = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x^4} - \frac{x^3}{3}$ នោះ $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x^5} - x^2$

c) $y = \left(x^2 + x\right)^3$ នោះ $y' = 3(2x+1)(x^2+x)^3$

d) $y = (x^2+1)^4$ នោះ $y' = 8x(x^2+1)^3$

e) $y = \sqrt{x^2 - 4x}$ នោះ $y' = \frac{x-2}{2\sqrt{x^2-4x}}$

f) $y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ នោះ $y' = -\frac{1+x}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

IV-គណនាដេរីវេ

a) $y = \frac{x-1}{x+1}$

b) $y = \frac{2x}{x-2}$

c) $y = \frac{2x+2}{x+2}$

d) $y = \frac{2x-3}{x+1}$

e) $y = \frac{1}{x^2 - x + 1}$

f) $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$

ដំណោះស្រាយ

a) $y = \frac{x-1}{x+1}$ តាមរូបមន្ត $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ ។

គេបាន $y' = \frac{(x-1)'(x+1) - (x+1)'(x-1)}{(x+1)^2}$

$$= \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$ ។

b) $y = \frac{2x}{x-2}$ គេបាន $y' = \frac{2(x-2) - 2x}{(x-2)^2} = -\frac{4}{(x-2)^2}$

c) $y=\frac{2x+2}{x+2}$ គេបាន

$$y'=\frac{2(x+2)-(2x+2)}{(x+2)^2}=\frac{2}{(x+2)^2}$$

d) $y=\frac{2x-3}{x+1}$ គេបាន $y'=\frac{2(x+1)-(2x-3)}{(x+1)^2}=\frac{5}{(x+1)^2}$

e) $y=\frac{1}{x^2-x+1}$

គេបាន $y'=-\frac{(x^2-x+1)'}{(x^2-x+1)^2}=-\frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}$ ។

f) $y=\frac{1}{x^2-4x+3}$

គេបាន $y'=-\frac{2x-4}{(x^2-4x+3)^2}=-\frac{2(x-2)}{(x^2-4x+3)^2}$ ។

V-គណនាដេរីវេ

a) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

b) $y=\frac{2x}{x^2+1}$

c) $y=\frac{x^2-x}{x^2+x+1}$

d) $y=\frac{x^2-2x}{x^2-2x-3}$

e) $y=\frac{x^2+4x}{x^2+4x+3}$

f) $y=\frac{2x^3-6x^2+1}{x^3-3x^2}$

ដំណោះស្រាយ

a) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ តាមរូបមន្ត $(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ ។

គេបាន $y' = \frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$

b) $y = \frac{2x}{x^2+1}$ នោះ $y' = \frac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ ។

c) $y = \frac{x^2-x}{x^2+x+1}$

គេបាន $y' = \frac{(2x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2-x)}{(x^2+x+1)^2}$

$$= \frac{2x^3+x^2+x-1-2x^3+x^2+x}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2}$$

d) $y = \frac{x^2-2x}{x^2-2x-3}$

គេបាន $y' = \frac{(2x-2)(x^2-2x-3)-(2x-2)(x^2-2x)}{(x^2-2x-3)^2}$

$$= \frac{(2x-2)(x^2-2x-3-x^2+2x)}{(x^2-2x-3)^2} = \frac{-6(x-1)}{(x^2-2x-3)^2}$$

e) $y = \frac{x^2+4x}{x^2+4x+3}$

$$y' = \frac{(2x+4)(x^2+4x+3)-(2x+4)(x^2+4x)}{(x^2+4x+3)^2} = \frac{6(x+2)}{(x^2+4x+3)^2}$$

$$f)\, y=\frac{2x^3-6x^2+1}{x^3-3x^2}=2+\frac{1}{x^3-3x^2}$$

គេបាន $y'=-\frac{(x^3-3x^2)'}{(x^3-3x^2)^2}=-\frac{3x^2-6x}{x^4(x-3)^2}=-\frac{3(x-2)}{x^3(x-3)^2}$

VI-គណនាដេរីវេ

1) $y=3\sin x-\sin^3 x$

គេបាន $y'=3\cos x-3\cos x\sin^2 x$

$$=3\cos x\left(1-\sin^2 x\right)$$

$$=3\cos x\left(\cos^2 x\right)=3\cos^3 x$$

2) $y=\sin^4 x\cos 4x$

គេបាន $y'=(\sin^4 x)'\cos 4x+(\cos 4x)'\sin^4 x$

$$=4\cos x\sin^3 x\cos 4x-4\sin 4x\sin^4 x$$

$$=4\sin^3 x\left(\cos x\cos 4x-\sin x\sin 4x\right)$$

$$=4\sin^3 x\cos 5x$$

3) $y=e^{x-x^2}$

គេបាន $y'=(x-x^2)'e^{x-x^2}=(1-2x)e^{x-x^2}$ ។

4) $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

គេបាន $y'=\frac{(e^x-1)'(e^x+1)-(e^x+1)'(e^x-1)}{(e^x+1)^2}$

$$=\frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}=\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$ ។

5） $y=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-4x+5\right)$

គេបាន $y'=\frac{1}{2}.\frac{(x^2-4x+5)'}{x^2-4x+5}=\frac{x-2}{x^2-4x+5}$ ។

៥-ដេរីវេបន្តបន្ទាប់

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=f\left(x\right)$ អាចមានដេរីវេខ្លួនឯងបន្តទៀត។ គេហៅដេរីវេបន្តបន្ទាប់ដូចតទៅ ៖

ដេរីវេទី1 $y'=\frac{dy}{dx}=f'(x)=f^{(1)}\left(x\right)$

ដេរីវេទី2 $y''=\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)=f^{(2)}\left(x\right)$

ដេរីវេទី3 $y'''=\frac{d^3y}{dx^2}=f'''(x)=f^{(3)}\left(x\right)$

ដេរីវេទី4 $y^{(4)}=\frac{d^4y}{dx^4}=f^{(4)}\left(x\right)$

ដេរីវេទី n $y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}(x)$ ។

ឧទាហរណ៍១ គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=\frac{1}{x}$?

គេបាន $y' = -\frac{1}{x^2} = (-1)^1 \cdot \frac{1!}{x^2}$

$y'' = \frac{2}{x^3} = (-1)^2 \cdot \frac{2!}{x^3}$

$y''' = -\frac{6}{x^4} = (-1)^3 \frac{3!}{x^4}$

$- - - - - - - - - - - - - -$

ដូចនេះ $y^{(n)} = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}$ ។

ឧទាហរណ៍២ គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y = e^{2x}$

គេបាន $y' = 2e^{2x} = 2^1 e^{2x}$

$y'' = 4e^{2x} = 2^2 e^{2x}$

$y''' = 8e^{2x} = 2^3 e^{2x}$

$- - - - - - - - - - - - - -$

ដូចនេះ $y^{(n)} = 2^n e^{2x}$ ។

ឧទាហរណ៍៣ គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y = xe^x$

គេបាន $y' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

$y'' = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$

$y''' = e^x + (2+x)e^x = (3+x)e^x$

$- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -$

ដូចនេះ $y^{(n)} = (n+x)e^x$ ។

ឧទាហរណ៍៤ គណនាដេរីវេទី n នៃ $y = \sin(ax)$?

គេបាន $y' = a\cos ax = a\sin(ax + \frac{\pi}{2})$

$$y'' = a^2\cos(ax + \frac{\pi}{2}) = a^2\sin(ax + \frac{2\pi}{2})$$

$$y''' = a^3\cos(ax + \frac{2\pi}{2}) = a^3\sin(ax + \frac{3\pi}{2})$$

ឧបមាថា $y^{(n)} = a^n\sin(ax + \frac{n\pi}{2})$ ពិត

នោះ $y^{(n+1)} = a^{n+1}\cos(ax + \frac{n\pi}{2}) = a^{n+1}\sin(ax + \frac{n+1}{2}\pi)$ ពិត

ដូចនេះ $y^{(n)} = a^n\sin(ax + \frac{n\pi}{2})$ ។

ឧទាហរណ៍៥ គណនាដេរីវេទី n នៃ $y = \cos(ax)$?

គេបាន $y' = -a\sin ax = a\cos(ax + \frac{\pi}{2})$

$$y'' = -a^2\sin(ax + \frac{\pi}{2}) = a^2\cos(ax + \frac{2\pi}{2})$$

$$y''' = -a^3\sin(ax + \frac{2\pi}{2}) = a^3\cos(ax + \frac{3\pi}{2})$$

ឧបមាថា $y^{(n)} = a^n\cos(ax + \frac{n\pi}{2})$ ពិត

នោះ $y^{(n+1)} = -a^{n+1}\sin(ax + \frac{n\pi}{2})$

$$= a^{n+1}\cos(ax + \frac{n+1}{2}\pi) \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $y^{(n)} = a^n \cos(ax + \frac{n\pi}{2})$ ។

ឧទាហរណ៍៦ គណនាដេរីវេទី n នៃ $y = \ln x$

គេបាន $y' = \frac{1}{x} = (-1)^0 \frac{0!}{x}$

$$y'' = -\frac{1}{x^2} = (-1)^1 \frac{1!}{x^2}$$

$$y''' = \frac{2}{x^3} = (-1)^2 \frac{2!}{x^3}$$

$$y^{(4)} = -\frac{6}{x^3} = (-1)^3 \frac{3!}{x^3}$$

ឧបមាថា $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$ ពិត

គេបាន $y^{(n+1)} = (y^{(n)})' = (-1)^{n-1}(-1)\frac{(n-1)!n}{x^{n+1}}$

$$= (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$ ពិត

ដូចនេះ $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$ ។

✧✧✧✧✧

ជំពូកទី២

អនុវត្តន៍ដេរីវេ

១-សមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាបតាងអនុគមន៍មួយ

✧ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f\left(x\right)$

ត្រង់ចំណុច x_0 គឺជាដេរីវេនៃ f ត្រង់ x_0 គឺ $m=f'(x_0)$ ។

✧ សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f\left(x\right)$

ត្រង់ចំណុច x_0 គឺ $(T): y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ ។

ឧទាហរណ៍ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង $(c): y=x^2+1$

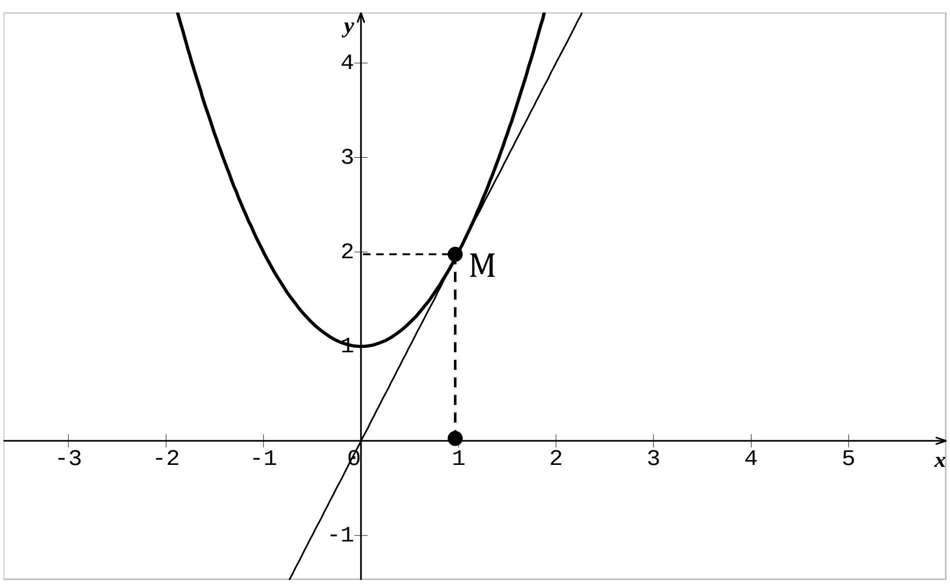
ត្រង់ចំណុច M មានអាប់ស៊ីស $x_0=1$ ។

ចំពោះ $x_0=1$ នោះ $y_0=1^2+1=2$, គេបាន $M(1,2)$

គេមាន $y'=2x$ នោះមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $x_0=1$

គឺ $y'_0=f'\left(1\right)=2$ ។

ដូចនេះ $\left(T\right): y-2=2(x-1)$ ឬ $(T): y=2x$ ។

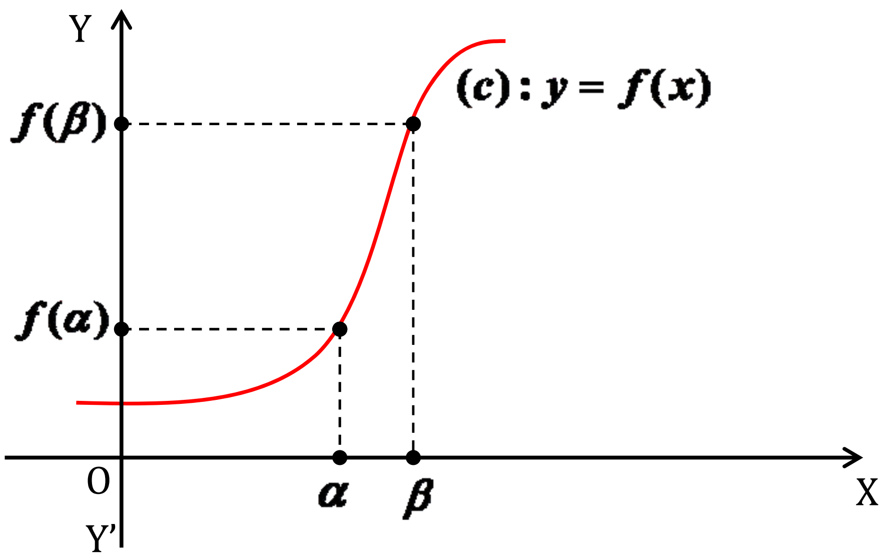


២-ទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍

ក)អនុគមន៍កើន

✧ f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ I លុះត្រាតែ $f'(x)>0$ គ្រប់ $x\in I$

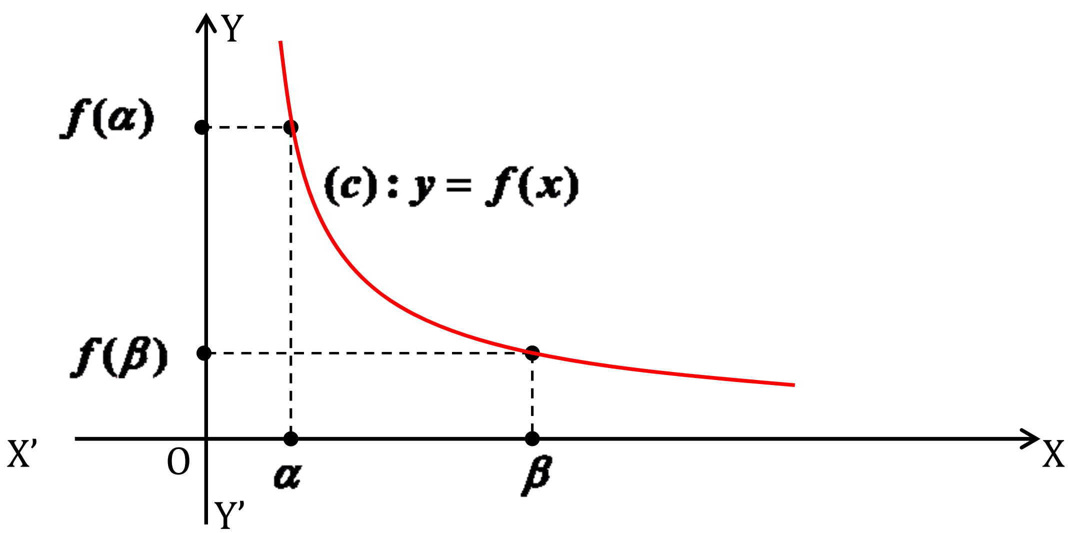
✧ លក្ខណៈ បើ $\alpha,\beta\in I$ ដែល $\alpha>\beta$ នាំឲ្យ $f(\alpha)<f(\beta)$ ។



ខ)អនុគមន៍ចុះ

✧ f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ I លុះត្រាតែ $f'(x)<0$ គ្រប់ $x\in I$

✧ លក្ខណៈ បើ $\alpha,\beta\in I$ ដែល $\alpha>\beta$ នាំឲ្យ $f(\alpha)>f(\beta)$ ។



ឧទាហរណ៍១ គេឲ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x$

ចូរបង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍កើនលើ IR ។

គេមាន $f'(x) = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2 > 0 \ \forall x \in \Re$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើននៅលើ IR ។

ឧទាហរណ៍២ គេឲ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = -\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x + 3$

ចូរបង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ចុះលើ IR ។

គេមាន $f'(x) = -x^2 - 4x - 5 = -\left[(x+2)^2 + 1\right] < 0 \ \forall x \in \Re$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើ IR ។

ឧទាហរណ៍៣ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$f\left(x\right) = \frac{x^3}{3} - \left(m+1\right)x^2 + \left(5m-1\right)x + 2m - 3$,

m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

កំណត់លក្ខខណ្ឌ m ដើម្បីឲ្យ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $\Re$

គេមាន $f'(x) = x^2 - 2(m+1)x + 5m - 1$ ។

ដើម្បីឲ្យ f ជាអនុគមន៍កើនលើ$\Re$ លុះត្រាតែ$\forall x \in \Re: f'(x) > 0$

សមមូល $\begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' = (m+1)^2 - (5m-1) = m^2 - 3m + 2 < 0 \end{cases}$

សមមូល $m \in \left(1,2\right)$ ។

ឧទាហរណ៍៨ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$f(x)=\frac{x^2}{2014}+x+2014$ និងពីរចំនួនពិត $a>0\,,b>0$ ។

ចូរស្រាយថា $f\left(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}\right)>f\left(\frac{a+b}{1+a+b}\right)$ គ្រប់$a,b>0$ ។

គេមាន $f'(x)=\frac{x}{1007}+1$ មានឫស $x=-1007$ ។

ចំពោះ $x\in(-\infty\,,-1007)$ នោះ $f'(x)<0$ គេបាន f កើន

ចំពោះ $x\in(-1007,+\infty)$ នោះ $f'(x)>0$ គេបាន f កើន

តាង $\alpha=\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}>0$ និង $\beta\frac{a+b}{1+a+b}>0$

គេមាន $\frac{a}{1+a}>\frac{a}{1+a+b}$ និង $\frac{b}{1+b}>\frac{b}{1+a+b}$

នោះ $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}>\frac{a+b}{1+a+b}$ ឬ $\alpha>\beta$ ។

ដោយ $\alpha>\beta$ នោះ $f(\alpha)>f(\beta)$ (ព្រោះ f កើនលើ)

ដូចនេះ $f\left(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}\right)>f\left(\frac{a+b}{1+a+b}\right)$ ។

ឧទាហរណ៍៩ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ ដែល $x\in IR$

ក)សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

ខ)ចូរប្រៀបធៀបចំនួន $A=\frac{0.6282}{1+(0.3141)^2}$ និង $B=\frac{0.6284}{1+(0.3142)^2}$

ដំណោះស្រាយ

ក)សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

គេមាន $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ ដែល $x\in IR$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{2\left(1+x^2\right)-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$

ចំពោះ $x\in IR:\left(1+x^2\right)^2>0$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $1-x^2$

បើ $f'(x)=0$ នោះ $1-x^2=0$ គេទាញបាន $x_1=-1\,,\,x_2=1$ ។

តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ចំពោះ $x\in(-1,1)$: $f(x)>0$ និង

$x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$: $f'(x)<0$

ដូចនេះអនុគមន៍ f កើនលើចន្លោះ $(-1,1)$ និង f ជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ ។

ខ)ប្រៀបធៀបចំនួន $A=\dfrac{0.6282}{1+(0.3141)^2}$ និង $B=\dfrac{0.6284}{1+(0.3142)^2}$

គេមាន $A=f(0.3141)$ និង $B=f(0.3142)$

ដោយចំនួន 0.3141 និង 0.3142 ស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $(-1,1)$
នោះតាមលក្ខណះអនុគមន៍កើនគេបាន $0.3141 < 0.3142$
នាំឲ្យ $f(0.3141) < f(0.3142)$ ។
ដូចនេះ $A = \dfrac{0.6282}{1+(0.3141)^2} < B = \dfrac{0.6284}{1+(0.3142)^2}$ ។

ឧទាហរណ៍៦

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \ge 0$ ចូរស្រាយថា ៖

ក) $e^x \ge 1 + x$ ខ) $\sin x \le x$

គ) $\ln(1+x) \le x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ ឃ) $(1+x)^n \ge 1 + nx$ (ដែល $n \in IN$)

ដំណោះស្រាយ

ក) $e^x \ge 1 + x$

តាង $f(x) = e^x - x - 1$ ដែល $x \ge 0$

គេបាន $f'(x) = e^x - 1 \ge 0$ គ្រប់ $x \ge 0$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើន

តាមលក្ខណះអនុគមន៍កើនចំពោះ $x \ge 0$ នាំឲ្យ $f(x) \ge f(0)$

សមមូល $e^x - x - 1 \ge e^0 - 0 - 1 = 0$ នោះ $e^x \ge 1 + x$

ដូចនេះ $e^x \ge 1 + x$ ។

ខ) $\sin x \le x$

តាង $f(x) = \sin x - x$ ដែល $x \ge 0$

គេបាន $f'(x)=\cos x-1=-2\sin^2\frac{x}{2}\le 0$ គ្រប់ $x\ge 0$

នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះ។

តាមលក្ខណៈអនុគមន៍ចុះចំពោះ $x\ge 0$ នាំឲ្យ $f(x)\le f(0)$

សមមូល $\sin x-x\le 0$ នោះ $\sin x\le x$

ដូចនេះ $\sin x\le x$ ។

គ) $\ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

តាង $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$ ដែល $x\ge 0$

គេបាន $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x-x^2=-\frac{x^3}{1+x}\le 0$ គ្រប់ $x\ge 0$

នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះ។

តាមលក្ខណៈអនុគមន៍ចុះចំពោះ $x\ge 0$ នាំឲ្យ $f(x)\le f(0)$

សមមូល $\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\le 0$ នោះ

$\ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

ដូចនេះ $\ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ ។

ឃ) $(1+x)^n\ge 1+nx$ (ដែល $n\in IN$)

តាង $f(x)=(1+x)^n-1-nx$ ដែល $x\ge 0$

គេបាន $f'(x)=n(1+x)^{n-1}-n=nx\,g(x)\ge 0$ គ្រប់ $x\ge 0$

ដែល $g(x)=(1+x)^{n-2}+(1+x)^{n-3}+...+(1+x)+1>0\forall x\geq 0$

នោះ f ជាអនុគមន៍កើនតាមលក្ខណៈអនុគមន៍កើនចំពោះ $x\geq 0$

នាំឲ្យ $f(x)\geq f(0)$ សមមូល $(1+x)^n-1-nx\geq 0$

នោះ $(1+x)^n\geq 1+nx$ ពិត

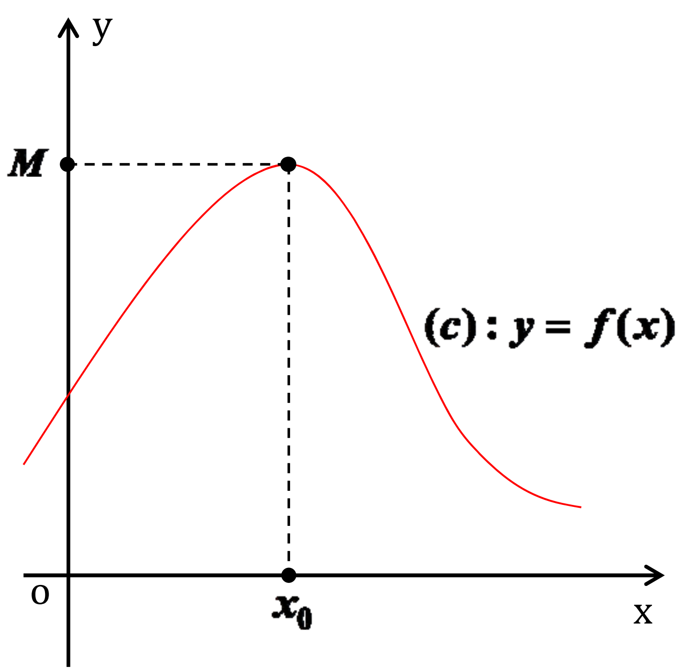
ដូចនេះ $(1+x)^n\geq 1+nx$ (ដែល $n\in IN$)។

៣-បរមាធៀបនៃអនុគមន៍

✧ អនុគមន៍ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=x_0$ កាលណា

$$\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases}$$

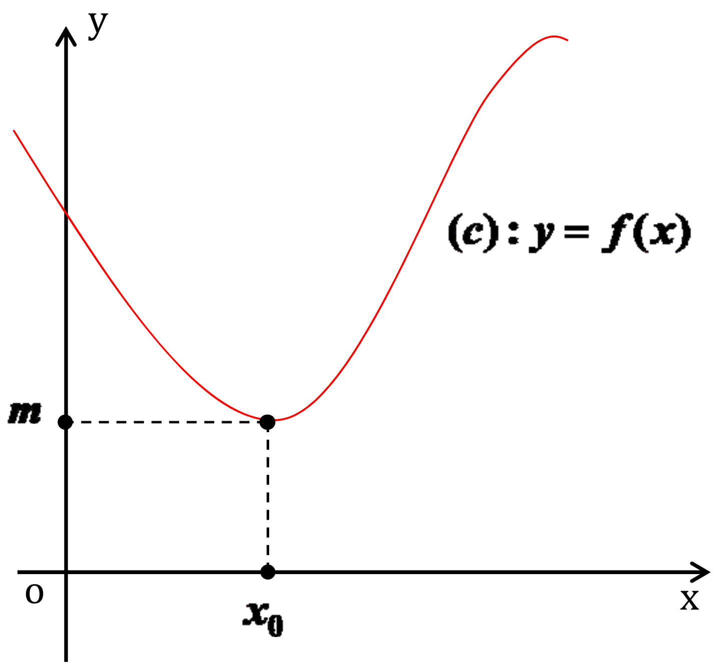
✧ $f(x_0)=M$ ជាតម្លៃអតិបរមាធៀប ។



✧ អនុគមន៍ f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = x_0$ កាលណា

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$$

✧ $f\left(x_0\right) = m$ ជាតម្លៃអប្បបរមាធៀប ។



ឧទាហរណ៍១

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = (x^2 + bx + c)e^{x-1}$

កំណត់តម្លៃ b និង c ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាស្មើ 3 ត្រង់ចំណុច $x = 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃ b និង c

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាស្មើ 3 ត្រង់ចំណុច $x=1$

លុះត្រាតែ $\begin{cases} f'(1)=0 \\ f(1)=2 \\ f''(1)<0 \end{cases}$

គេមាន $f(1)=1+b+c=3$ នោះ $b+c=2$ (1)

ហើយ $f'(x)=(2x+b)e^{x-1}+(x^2+bx+c)e^{x-1}$

នោះ $f'(1)=2+b+1+b+c=0$ ឬ $2b+c=-3$ (2)

យក (2) ដក (1) អង្គនិងអង្គគេបាន $b=-5$ នោះ $c=7$

ហើយ $f(x)=(x^2-5x+7)e^{x-1}$

គេបាន $f'(x)=(2x-5)e^{x-1}+(x^2-5x+7)e^{x-1}$

$$=(x^2-3x+2)e^{x-1}$$

និង $f''(x)=(2x-3)e^{x-1}+(x^2-3x+2)e^{x-1}$

$=(x^2-x-1)e^{x-1}$ នោះ $f''(1)=-1<0$ ពិត

ដូចនេះ $b=-5$, $c=7$ ។

ឧទាហរណ៍២

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=x+b+\dfrac{c}{x}$

កំណត់តម្លៃ b និង c ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាស្មើ 3 ត្រង់ចំណុច $x=3$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃ b និង c

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ 3 ត្រង់ចំណុច $x=3$

លុះត្រាតែ $\begin{cases} f'(3)=0 \\ f(3)=3 \\ f''(3)>0 \end{cases}$

គេមាន $f(3)=3+b+\frac{c}{3}=3$ សមមូល $3b+c=0$ (1)

ហើយ $f'(x)=1-\frac{c}{x^2}$ នោះ $f'(3)=1-\frac{c}{9}=0$ ឬ $c=9$

តាម (1) គេទាញ $b=-\frac{c}{3}=-3$

ដោយ $f''(x)=\frac{2c}{x^3}$ នោះ $f''(3)=\frac{18}{3^3}=\frac{2}{3}>0$ ពិត

ដូចនេះ $b=-3$, $c=9$ ។

៤-ភាពផត ប៉ោង និង ចំណុចរបត់

ក)អនុគមន៍ផត-ប៉ោង

✧ បើគ្រប់ $x\in I$ គេមាន $f''(x)<0$ នោះគេថា f ជាអនុគមន៍ប៉ោង(Convex function)លើចន្លោះ I ។

✧ បើគ្រប់ $x\in I$ គេមាន $f''(x)<0$ នោះគេថា f ជាអនុគមន៍ប៉ោង(Concave function)លើចន្លោះ I ។

ខ)ចំណុចរបត់នៃខ្សែកោង

✧ គេថាចំណុច $I(x_0, y_0)$ ជាចំណុចរបត់នៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y = f(x)$ កាលណាខ្សែកោងប៉ោង(ឬផត) នៅលើ $[a, x_0]$ ហើយផត(ឬប៉ោង)នៅលើ $[x_0, b]$ ។

✧ របៀបរកចំណុចរបត់របស់ខ្សែកោងតាង $y = f(x)$ គេត្រូវ ៖

☞ គណនាដេរីវេទីពីរ $y'' = f''(x)$

☞ ដោះស្រាយសមីការ $f'(x) = 0$

☞ សិក្សាសញ្ញានៃ $f''(x)$

-បើ $f''(x)$ប្តូរសញ្ញានៅសងខាងនៃឬស x_0 នោះខ្សែកោងមានចំណុចរបត់ $I\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ ។

-បើ $f''(x)$មិនប្តូរសញ្ញានោះខ្សែកោងគ្មានចំណុចរបត់ទេ ។

ឧទាហរណ៏១

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចរបត់ I របស់ខ្សែកោង (c) តាង f ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចរបត់ I

គេបាន $y' = 3x^2 - 12x + 9$ និង $y'' = 6x - 12$

បើ $y'' = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0$ ឬ $x = 2$

តារាងសញ្ញានៃ $f''(x)$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

ដោយត្រង់ចំណុច $x=2$ អនុគមន៍ y'' ប្តូរសញ្ញាពីនោះខ្សែកោង មានចំណុចរបត់មួយគឺ $I(2,2)$ ព្រោះ $y(2)=8-24+18=2$ ។

ឧទាហរណ៍២

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{1}{4}(x^2-7x+14)\,e^{x-1}$

កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចរបត់របស់ខ្សែកោង (c) តាង f ។

ដំណោះស្រាយ

គេបាន $y'=\frac{1}{4}(2x-7)e^{x-1}+\frac{1}{4}(x^2-7x+14)e^{x-1}$

$$=\frac{1}{4}(x^2-5x+7)e^{x-1}$$

និង $y''=\frac{1}{4}(2x-5)e^{x-1}+\frac{1}{4}(x^2-5x+7)e^{x-1}$

$$=\frac{1}{4}(x^2-3x+2)\,e^{x-1}$$

បើ $y''=0 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$ ឬ $x_1=1\,,\,x_2=2$

តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ដោយត្រង់ចំណុច $x=1$ និង $x=2$អនុគមន៍ y'' ប្តូរសញ្ញា នោះខ្សែកោងមានចំណុចរបត់ពីរគឺ $I_1(1,2)$, $I_2(2,e)$ ព្រោះ $y(1)=2$ និង $y(2)=e$ ។

៥-ចំណោទបរមា

✧ វិធីរកបរមាកម្មនៃអនុគមន៍មួយអថេរ

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ $y=f(x)$

☞រកដេរីវេទីមួយ $y'=f'(x)$

☞ដោះស្រាយសមីការ $y'=f'(x)=0$ មានឬស $x=x_0$

☞រកដេរីវេទីពីរ $y''=f''(x)$

☞សន្និដ្ឋាន

-បើ $f''(x_0)<0$ នោះអនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ចំណុច $x=x_0$ គឺ $f(x_0)=M$ ។

-បើ $f''(x_0)>0$ នោះអនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ចំណុច $x=x_0$ គឺ $f(x_0)=m$ ។

-បើ $f''(x_0)=0$ មិនអាចសន្និដ្ឋានបាន ។

✧ វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយចំណោទបរមា

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ $y=f(x)$

☞ចំពោះលំហាត់ទាក់ទងនិងរូបធរណីមាត្រ គេត្រូវសង់រូបនោះ

☞ត្រូវជ្រើសរើសអថេរតាង(អញ្ញាត) ទៅតាមប្រធានចំណោទ

ដែលគេចោទសួរ ។

☞ត្រូវដាក់លក្ខខណ្ឌអញ្ញាតដើម្បីឲ្យចំណោទមានន័យ

☞ចងក្រងសមីការដែលទាក់ទងតាមបម្រាប់នៃប្រធាន និង តាម ទ្រឹស្តីបទ-រូបមន្ត ដែលចាំបាច់ពាក់ពន្ធ័ក្នុងចំណោទ ។

☞បង្កើតអនុគមន៍មួយដែលមានអថេរតែមួយតាមវិធីជំនួស បំបាត់សមីការដែលអាចរកតម្លៃបរមាកម្មបានតាមទ្រឹស្តីដេរីវេ

✧✧ **សម្គាល់ ៖**

ក្នុងករណីដែលមិនអាចបំបាត់បានគេអាចប្រើទ្រឹស្តីបទសំខាន់ៗ ក្នុងវិសមភាព សម្រាប់ស្វែងរកតម្លៃបរមាធៀបក្នុងចំណោទ។

ឧទាហរណ៍១

ចតុកោណកែងមួយមានផ្ទៃក្រឡា $1444m^2$ ។ កំណត់វិមាត្ររបស់ចតុកោណកែងនេះដោយដឹងថាវាមានបរិមាត្រអប្បបរមា ។

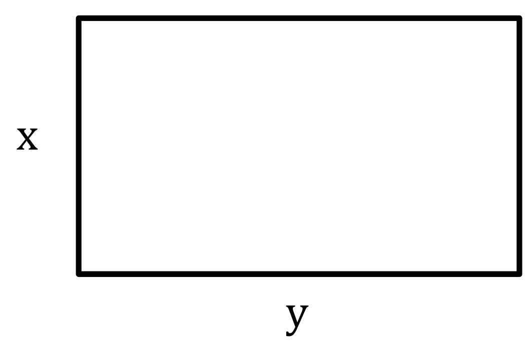
ដំណោះស្រាយ

កំណត់វិមាត្រចតុកោណកែង

តាង x និង y ជាវិមាត្រត្រូវរកដែលគិតជាម៉ែត្រ ។

ផ្ទៃក្រឡារបស់ចតុកោណកែងគឺ

$S = xy = 1444$ នោះ $y = \frac{1444}{x}$ **(1)**



តាង P ជាបរិមាត្ររបស់ចតុកោណកែង ។

គេបាន $P = 2(x+y) \quad (2)$

យក (1) ជួសក្នុង (2) គេបាន $P = 2(x + \frac{1444}{x})$ ដែល $x > 0$

គេបាន $P' = 2\left(1 - \frac{1444}{x^2}\right)$

បើ $P' = 0$ នោះ $1 - \frac{1444}{x^2} = 0$ នាំឲ្យ $x = \sqrt{1444} = 38m$

ហើយ $P'' = \frac{4 \times 1444}{x^3}$ នោះ $P''(38) = \frac{4 \times 1444}{38^3} = \frac{2}{19} > 0$

នាំឲ្យ P មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x = 38$ ។

យក $x = 38$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន $y = \frac{1444}{38} = 38$ ។

ដូចនេះ $x = 38\,m$, $y = 38m$ ជាវិមាត្រចតុកោណកែង ។

ឧទាហរណ៍២

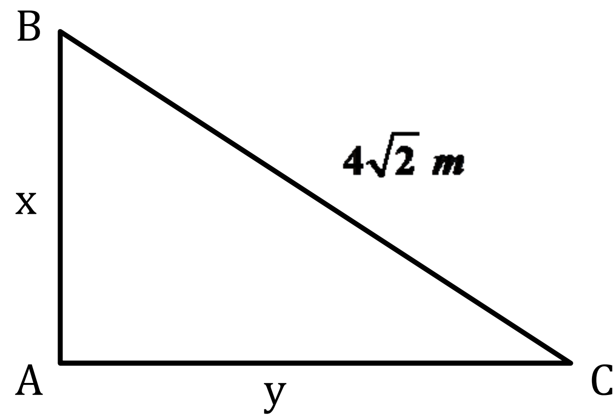
ត្រីកោណកែងមួយមានរង្វស់អ៊ីប៉ូតេនូស $4\sqrt{2}\,m$ ។

កំណត់រង្វាស់ជ្រុងទាំងពីរនៃមុំកែងដោយដឹងថាត្រីកោណនេះមាន ផ្ទៃក្រឡាអតិបរមា ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់រង្វាស់ជ្រុងទាំងពីរនៃមុំកែង

តាង x និង y ជារង្វាស់ជ្រុងទាំងពីរនៃមុំកែង(គិតជាម៉ែត្រ)



តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគរគេមាន

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

គេបាន $\left(4\sqrt{2}\right)^2 = x^2 + y^2$

នោះ $y = \sqrt{32 - x^2}$ (1)

តាង S ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ

នោះគេបាន $S = \frac{1}{2}xy$ (2)

យកសមីការ (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន ៖

$S = \frac{1}{2}x\sqrt{32 - x^2}$ ដែល $0 < x < 4\sqrt{2}$

គេបាន $S' = \frac{1}{2}\sqrt{32 - x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{32 - x^2}} = \frac{16 - x^2}{\sqrt{32 - x^2}}$

បើ $S' = 0$ នោះ $16 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 4$ ។

តារាងសញ្ញានៃ S'

x	0		4		$4\sqrt{2}$
S'		$+$	0	$-$	

ដោយត្រង់ $x = 4$ កន្សោម S' ប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ នោះ S មានអតិបរមាត្រង់ $x = 4$ ។ យក $x = 4$ ជួសក្នុង(2)បាន $y = 4$ ។

ដូចនេះ $x = 4\ m$, $y = 4m$ ។

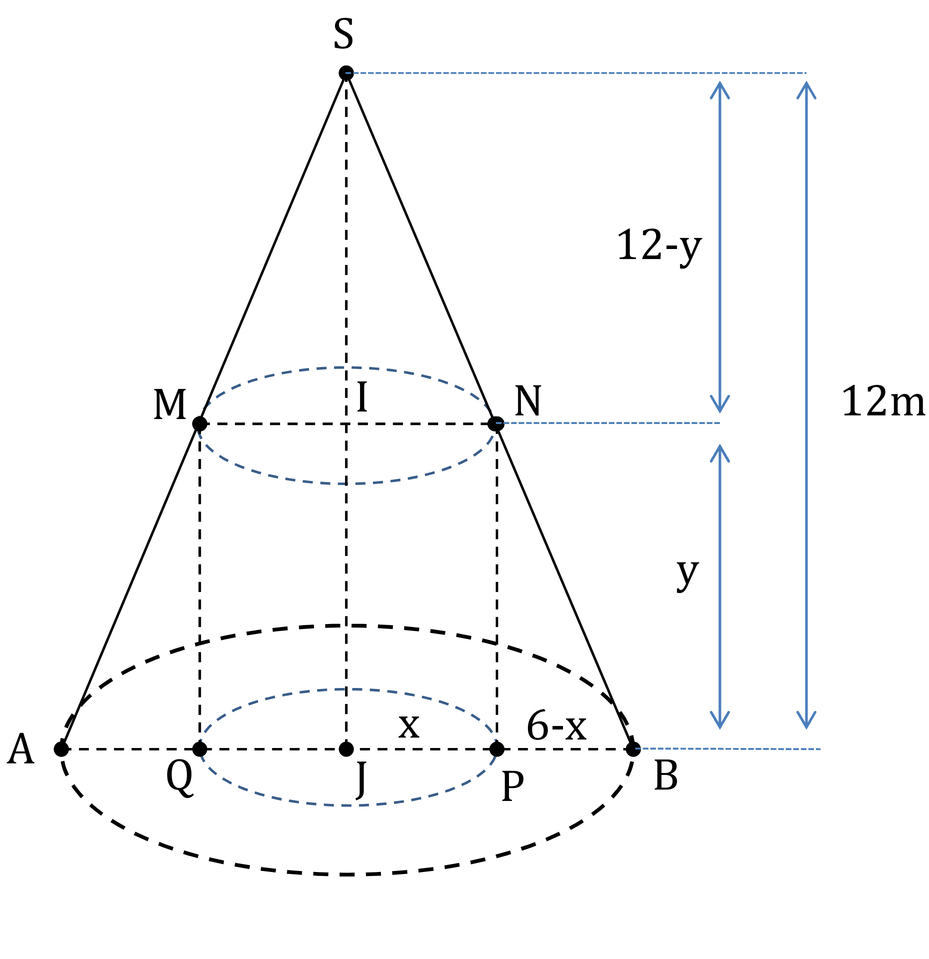
ឧទាហរណ៍៣

កោណបរិវត្តន៍មួយមានកម្ពស់ $12m$ និង កាំថាសបាត $6m$ ។ គេសង់ស៊ីឡាំងមួយចារឹកក្នុងកោណនេះ ។ កំណត់កម្ពស់ និង កាំថាសបាតរបស់ស៊ីឡាំងដោយដឹងថាវាមានមាឌអតិបរមា ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់រង្វាស់កម្ពស់ និង កាំបាតរបស់ស៊ីឡាំង

តាង x ជាកាំបាត និង y ជាកម្ពស់របស់ស៊ីឡាំង (គិតជាម៉ែត្រ)



យក V ជាមាឌរបស់ស៊ីឡាំងនោះគេបាន $V=\pi x^2 y$ (1)
ត្រីកោណកែង SIN ដូចត្រីកោណកែង SJB ព្រោះ$\angle SIN=\angle SJP$
គេបាន $\frac{SI}{SJ}=\frac{IN}{JB}$ ឬ $\frac{12-y}{12}=\frac{x}{6}$ នោះ $y=2(6-x)$ (2)
យក (2) ជំនួសក្នុង (1) គេបាន ៖
$V=2\pi x^2(6-x)=2\pi(6x^2-x^3)$ ដែល $0<x<6$ ។
ដេរីវេ $V'=2\pi\left(12x-3x^2\right)$
បើ $V'=0$ នោះ $12x-3x^2=3x(4-x)=0$ ឬ $x=4$ ព្រោះ $x>0$
ដេរីវេទីពីរ $V''=2\pi(12-6x)$ នោះ $V''(4)=-24\pi<0$
នាំឲ្យ V មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ចំណុច $x=4$ ហើយ $y=4$ ។
ដូចនេះ $x=4\ m$, $y=4m$ ។

ឧទាហរណ៍៨

គេយកខ្សែមួយមានប្រវែង $\ell=2013m$ មកបត់ធ្វើជាត្រីកោណមួយ តើគេត្រូវបត់វាដូចម្តេចទើបបានត្រីកោណមានផ្ទៃក្រឡាអតិបរមា ?

ដំណោះស្រាយ

តាង a,b,c ជាជ្រុងត្រីកោណដែលត្រូវធ្វើ (គិតជាម៉ែត្រ)
យក $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{\ell}{2}=\frac{2014}{2}=1007\ m$ ជាកន្លះបរិមាត្រ។
តាមរូបមន្តហេរ៉ុងផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណគឺ ៖

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S=\sqrt{1007(1007-a)(1007-b)(1007-c)}$ (1)

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្តនិងមធ្យមធរណីមាត្រគេមាន ៖

$$\frac{(1007-a)+(1007-b)+(1007-c)}{3}\geq\sqrt[3]{(1007-a)(1007-b)(1007-c)}$$

$$\frac{1007}{3}\geq\sqrt[3]{(1007-a)(1007-b)(1007-c)}$$

គេទាញ $(1007-a)(1007-b)(1007-c)\leq\frac{1007^3}{27}$ (2)

តាម(1) និង (2) គេបាន $S\leq\sqrt{\frac{1007^4}{27}}=\frac{1007^2}{3\sqrt{3}}=\frac{1014049}{3\sqrt{3}}$

គេបានផ្ទៃក្រឡាអតិបរមានៃត្រីកោណស្មើ $S_{\max}=\frac{1014049}{3\sqrt{3}}\ m^2$

ក្នុងករណីនេះវិសមភាពក្លាយជាសមភាពនោះ $a=b=c=\frac{\ell}{3}$

ដូចនេះគេត្រូវបត់ខ្សែជារាងត្រីកោណសមង្ស័មានជ្រុង $\frac{2014}{3}m$ ទើបបានត្រីកោណដែលមានផ្ទៃក្រឡាអតិបរមា ។

៦-ល្បឿន និង សំទុះនៃចលនា

ក)ល្បឿននៃចលនា

ល្បឿននៃចលនាមួយនៅខណះ t គឺ $V(t)=S'(t)=\frac{dS}{dt}$

ដែល $S(t)$ ជាចម្ងាយចរនៅខណះ t ។

ខ)សំទុះនៃចលនា

សំទុះនៃចលនានៅខណៈ t គឺ $a(t)=\frac{dV}{dt}=V'(t)$ ដែល $V(t)$ ជាល្បឿននៃចលនានៅខណៈ t ។

ឧទាហរណ៍១ ចំណុច M មួយផ្លាស់ទីនៅលើបន្ទាត់ចំនួនពិតចេញពីគល់អក្ស ។ ចំណុច M មានចម្ងាយចរ $S(t)=\frac{1}{2}t^2+4t$ (m) នៅខណៈ t វិនាទីក្រោយមក ។ រកល្បឿនចំណុច M ចំពោះ $t=2s$

ដំណោះស្រាយ

តាង $V(t)$ ជាល្បឿននៃចំណុច M នៅខណៈ t វិនាទីក្រោយមក

គេបាន $V(t)=\frac{dS}{dt}=S'(t)=t+4$

ចំពោះ $t=2s$ នោះ $V(2)=6\ m/s$ ។

ឧទាហរណ៍២ គេទំលាក់វត្ថុមួយដោយសេរីពីយន្តហោះដែលខណៈពេល t វិនាទីក្រោយមកវត្ថុនោះធ្លាក់បានចម្ងាយ $S(t)=\frac{10}{3}t^2$ កំណត់ល្បឿននៃវត្ថុខណៈពេល $t=6s$?

ដំណោះស្រាយ

តាង $V(t)$ ជាល្បឿននៃចំណុច M នៅខណៈ t វិនាទីក្រោយមក

គេបាន $V(t)=\frac{dS}{dt}=S'(t)=\frac{20t}{3}$ នោះ $V(6)=40\ m/s$ ។

ជំពូកទី៣

សិក្សាអនុគមន៍ និង ក្រាហ្វិក

វិធីសាស្ត្រសិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាប ៖

- ✧ *រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍* ៖

  ជាសំណុំតម្លៃនៃ x ដែលធ្វើឲ្យអនុគមន៍ $y = f(x)$ មានន័យ

- ✧ *ទិសដៅអថេរភាព* ៖
  - ☞រកដេរីវេ $y' = f'(x)$
  - ☞សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $y' = f'(x)$
  - ☞បញ្ជាក់ចំណុចបរមាធៀប (បើមាន)
  - ☞គណនាលីមីត
  - ☞កំណត់សមីការអាសុីមតូត
  - ☞គូសតារាងអថេរភាព
- ✧ *សំណង់ក្រាប* ៖
  - ☞រកអក្សឆ្លុះ-ផ្ចិតឆ្លុះ-ចំណុចរបត់ (បើមាន)
  - ☞រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វជាមួយអក្សកូអរដោនេ
  - ☞តារាងតម្លៃលេខត្រូវគ្នារវាង x និង y រួចគូសក្រាបតំណាងអនុគមន៍ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ ។

១-សិក្សាអនុគមន៍រាង $y = ax^2 + bx + c$

របៀបដោះស្រាយ

✧ ដែនកំណត់ $D = \Re$

✧ ទិសដៅអថេរភាព

ដេរីវេ $f'(x) = 2ax + b$

រកឬស $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2ax + b = 0$ ឬ $x = -\dfrac{b}{2a}$

តារាងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

-ករណី $a < 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

អនុគមន៍មានអតិបរមាធៀប $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$

-ករណី $a > 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀប $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$

គណនាលីមីត

-បើ $a>0$ នោះ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(ax^2+bx+c\right)=+\infty$

-បើ $a<0$ នោះ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(ax^2+bx+c\right)=-\infty$

តារាងអថេរភាព

-ករណី $a<0$

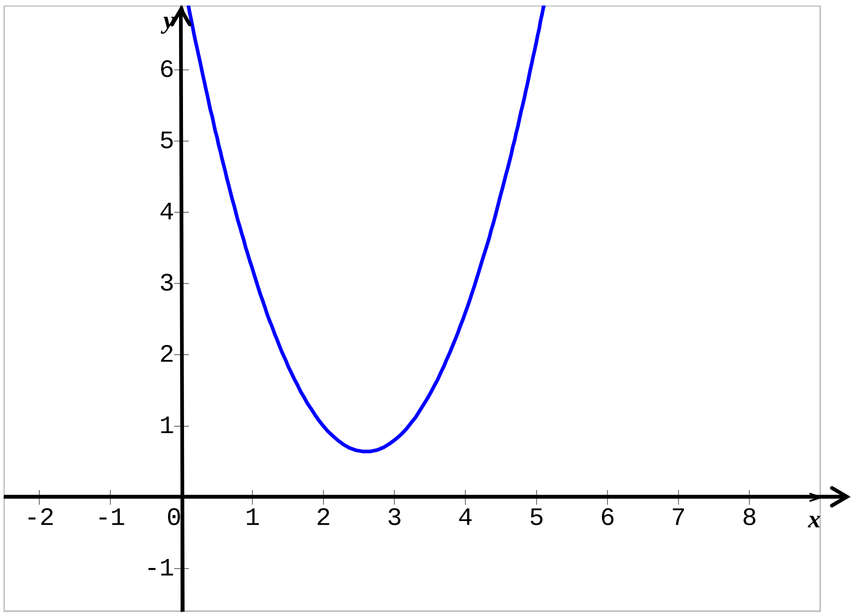
x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

-ករណី $a>0$

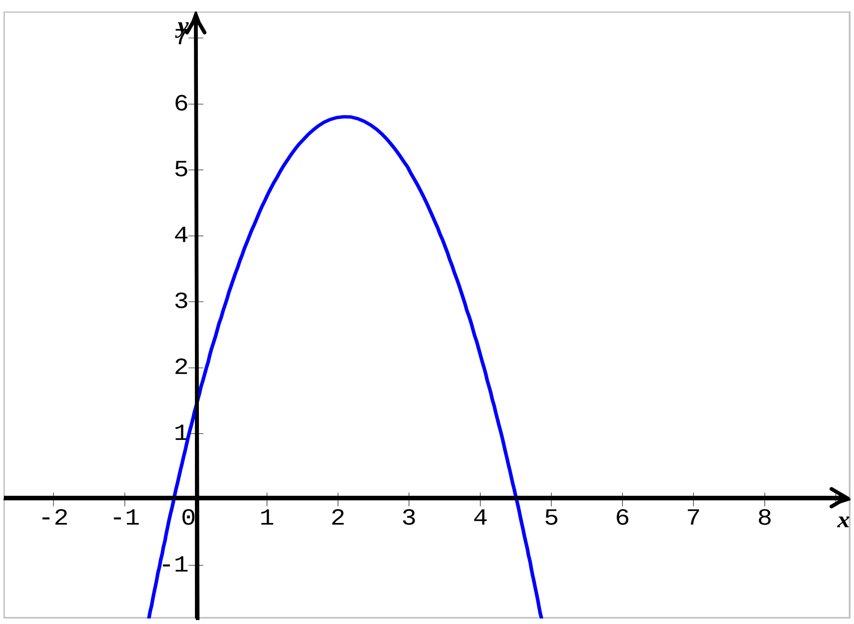
x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

✧ សំណង់ក្រាប ៖

-ករណី $a > 0$



-ករណី $a < 0$



ឧទាហរណ៍ សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍

$y = f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2}$ ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

✧ ដែនកំណត់

អនុគមន៍មានន័យជានិច្ចគ្រប់ $x \in IR$ នោះ $D = \Re$

✧ ទិសដៅអថេរភាព

ដេរីវេ $f'(x) = x - 2$

រកឫស $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ ឬ $x = 2$

តារាងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

ដោយត្រង់ $x = 2$ អនុគមន៍ y' ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

នោះអនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀប $f(2) = -\frac{1}{2}$

គណនាលីមីត

គេបាន $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2}\right) = +\infty$

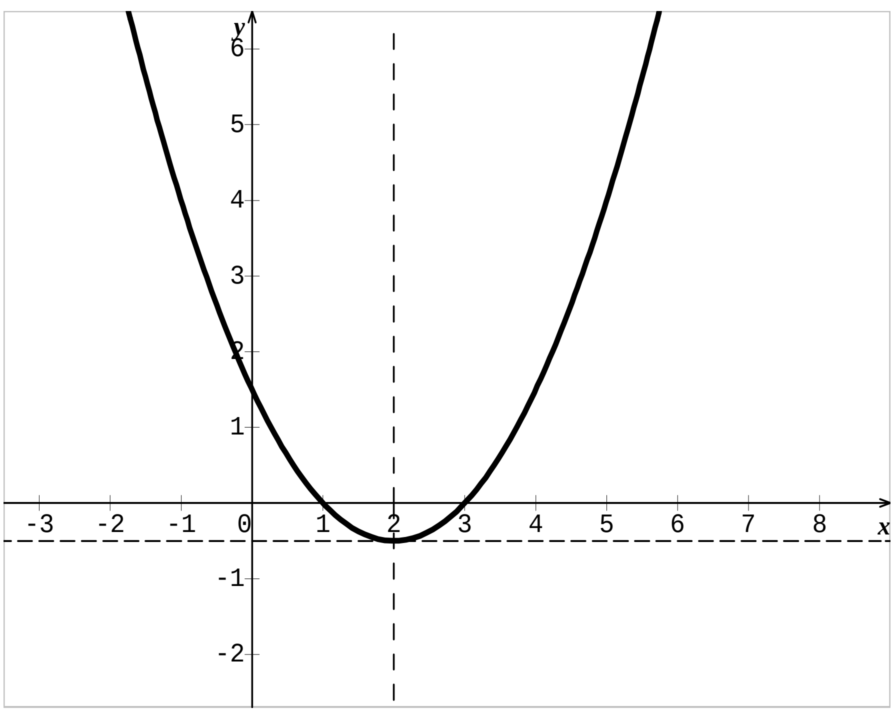
តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

✧ សំណង់ក្រាប ៖

ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ជាប៉ារ៉ាបូលមានកំពូល $S\left(2,-\frac{1}{2}\right)$

និងមានបន្ទាត់ $x=2$ ជាអ័ក្សឆ្លុះ ។



២-សិក្សាអនុគមន៍រាង $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

ដែល $c\neq 0$ និង $ad-bc\neq 0$

✧ដែនកំណត់

អនុគមន៍មានន័យកាលណា $cx+d\neq 0$ ឬ $x\neq -\dfrac{d}{c}$

ដូចនេះ $D=\Re-\{-\dfrac{d}{c}\}$

✧ទិសដៅអថេរភាព

គណនាដេរីវេ $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

-ករណី $ad-bc>0$ នោះ $y'>0$ គេបានអនុគមន៍កើនលើ D

-ករណី $ad-bc<0$ នោះ $y'<0$ គេបានអនុគមន៍ចុះលើ D

លីមីត និង សមីការអាស៊ីមតូត

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^{\pm}} f\left(x\right)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់មានសមីការ $x=-\dfrac{d}{c}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

$\lim\limits_{x\to\pm} f\left(x\right)=\dfrac{a}{c}$ នោះបន្ទាត់មានសមីការ $y=\dfrac{c}{a}$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតំណាងអនុគមន៍ ។

តារាងអថេរភាព

-ករណី $ad-bc>0$

x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	$\frac{a}{c}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{a}{c}$

-ករណី $ad-bc<0$

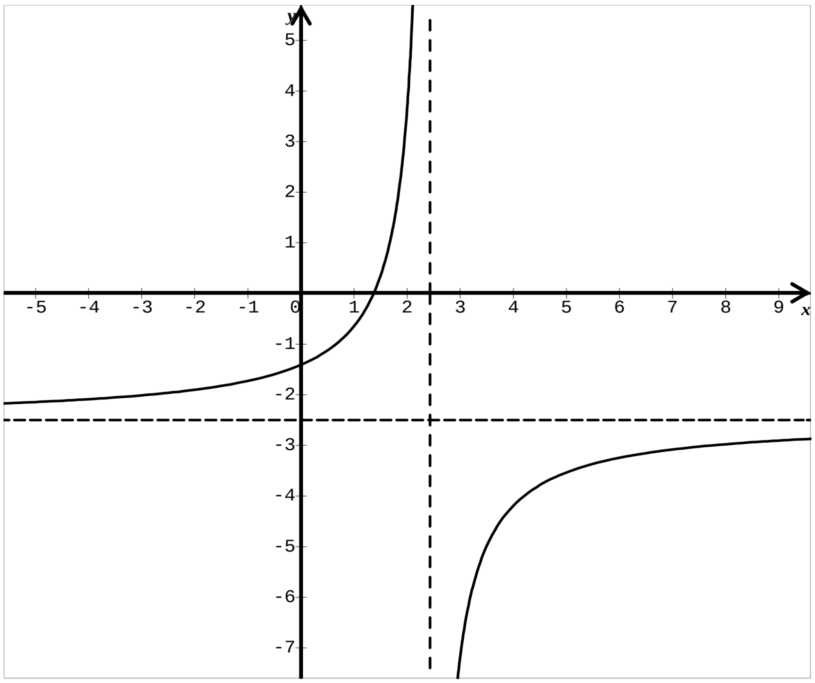
x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	$\frac{a}{c}$	$\searrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\searrow$	$\frac{a}{c}$

✧សំណង់ក្រាប

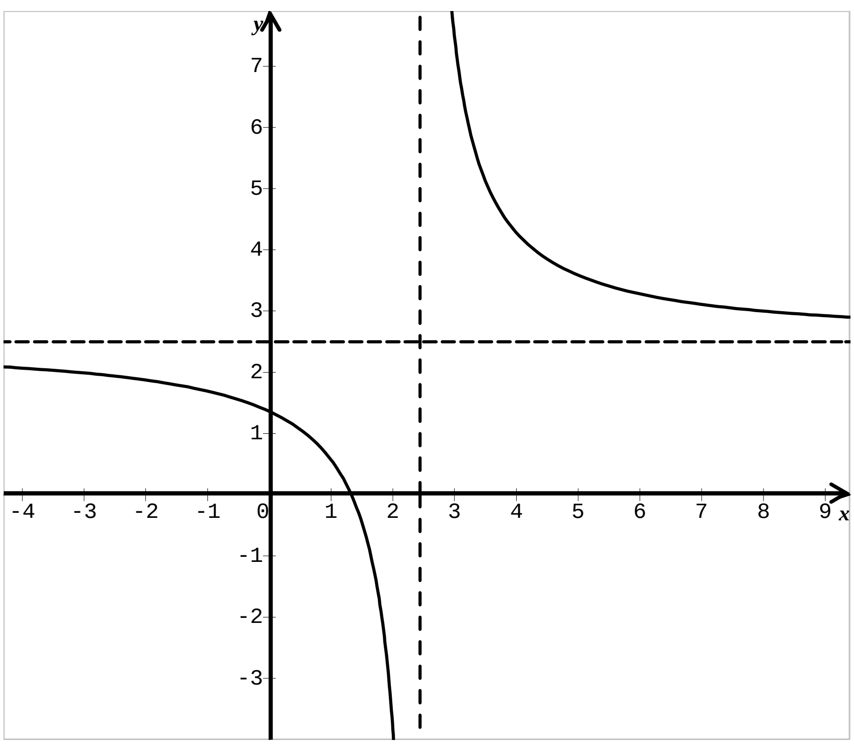
អាស៊ីមតូតឈរ $x=-\frac{d}{c}$ និង អាស៊ីមតូតដេក $y=\frac{a}{c}$ កាត់គ្នា ត្រង់ចំណុច $\Omega\left(-\frac{d}{c},\frac{a}{c}\right)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ ។

ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ថា $\Omega\left(-\frac{d}{c},\frac{a}{c}\right)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាបគេត្រូវប្តូរតម្រុយដោយធ្វើបម្លែងកិលវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{O\Omega}$ ។

-ករណី $ad - bc > 0$



-ករណី $ad - bc > 0$



ឧទាហរណ៍ ចូរសិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍

$y = \frac{2(x+1)}{x+2}$ ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

✧ដែនកំណត់

អនុគមន៍មានន័យកាលណា $x+2 \neq 0$ ឬ $x \neq -2$

ដូចនេះ $D = \Re - \{-2\}$

✧ទិសដៅអថេរភាព

គណនាដេរីវេ $y' = \frac{2(x+1)'(x+2) - 2(x+2)'(x+1)}{(x+2)^2}$

$$= \frac{2(x+2) - 2(x+1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{2x+4-2x-2}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2} > 0$$

គេបាន f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ D នោះវាគ្មានចំណុចបរមាធៀបទេ ។

លីមីត និង សមីការអាស៊ីមតូត

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$ និង $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$ នោះបន្ទាត់មានសមីការ $x = -2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

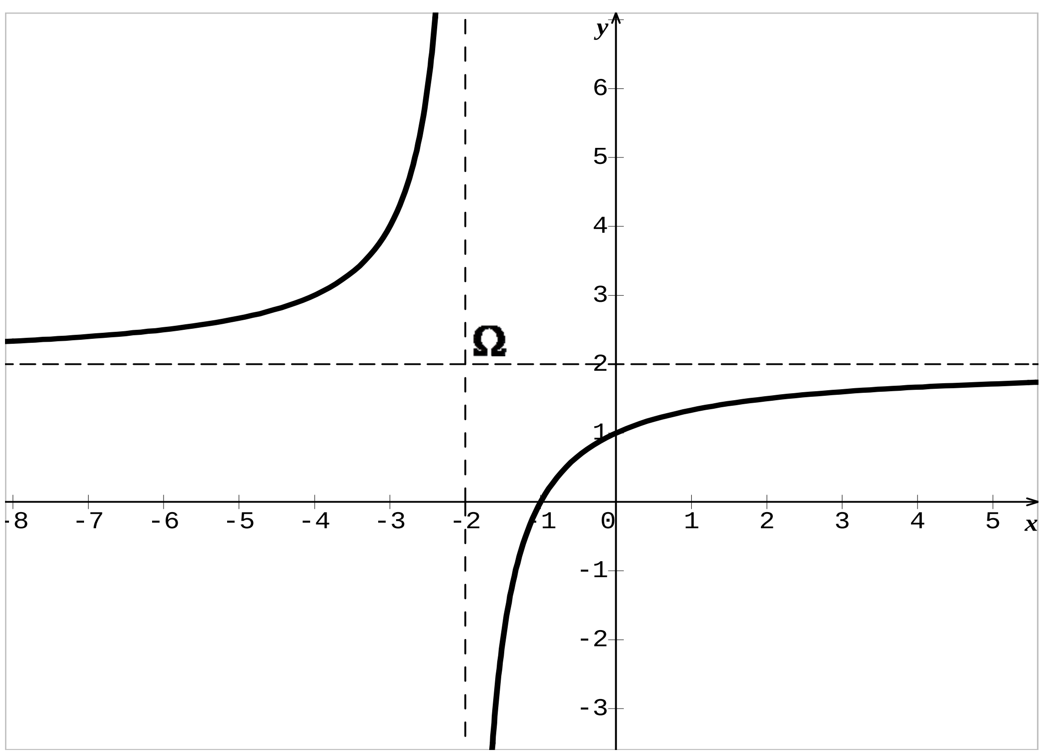
$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 2$ នោះបន្ទាត់មានសមីការ $y = 2$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតំណាងអនុគមន៍ ។

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

✧សំណង់ក្រាប

អាស៊ីមតូតឈរ $x=-2$ និង អាស៊ីមតូតដេក $y=2$ កាត់គ្នា ត្រង់ចំណុច $\Omega(-2\,,\,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ ។



៣-សិក្សាអនុគមន៍រាង $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

✧ ដែនកំណត់ $D = \Re$

✧ ទិសដៅអថេរភាព

គណនាដេរីវេ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

-បើ $f'(x) = 0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នានោះអនុគមន៍មានអតិបរមាធៀបមួយ និង អប្បបរមាធៀបមួយ ។

-បើ $f'(x) = 0$ គ្មានឫស ឬ មានឫសឌុបនោះអនុគមន៍គ្មានចំណុចបរមាធៀបទេ ។

គណនាលីមីត $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{បើ } a > 0 \\ +\infty & \text{បើ } a < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{បើ } a > 0 \\ -\infty & \text{បើ } a < 0 \end{cases}$$

តារាងអថេរភាព

-ករណី $f'(x) = 0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា

បើ $a > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

បើ $a < 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$+\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$-\infty$

-ករណី $f'(x) = 0$ មានឫសឌុប

បើ $a > 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	λ	$\nearrow$	$+\infty$

បើ $a < 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	λ	$\searrow$	$-\infty$

-ករណី $f'(x)=0$ គ្មានឫស

បើ $a>0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

បើ $a<0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

✧ សំណង់ក្រាប

-រកចំណុចរបត់

រកដេរីវេទីពីរ $f''(x)=6ax+2b$ មានឫស $x=-\dfrac{b}{3a}$

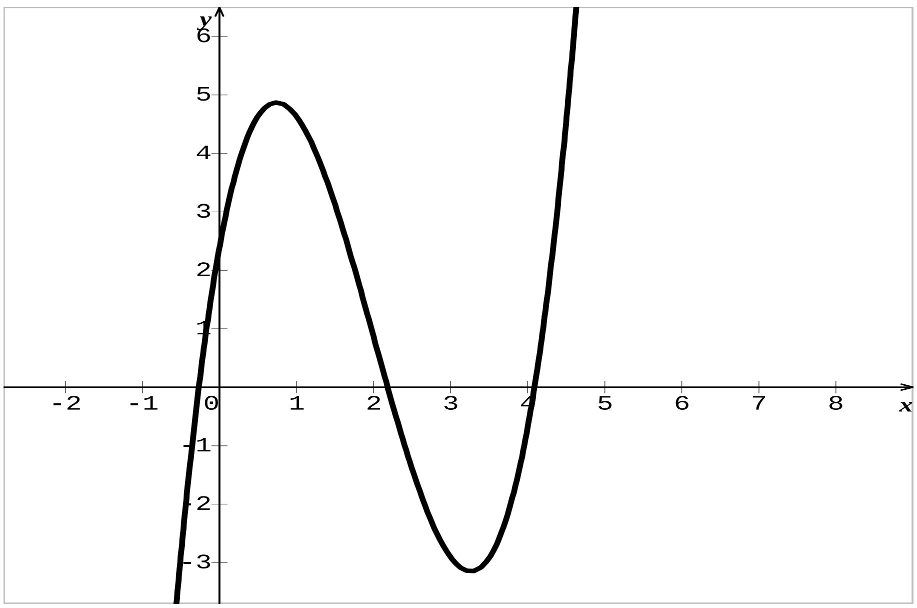
គូសតារាងសញ្ញានៃ $f''(x)$ រួចបញ្ជាក់ថាក្រាបតាងអនុគមន៍

មាន $I\left(-\dfrac{b}{3a}, f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$ ជាចំណុចរបត់ ។

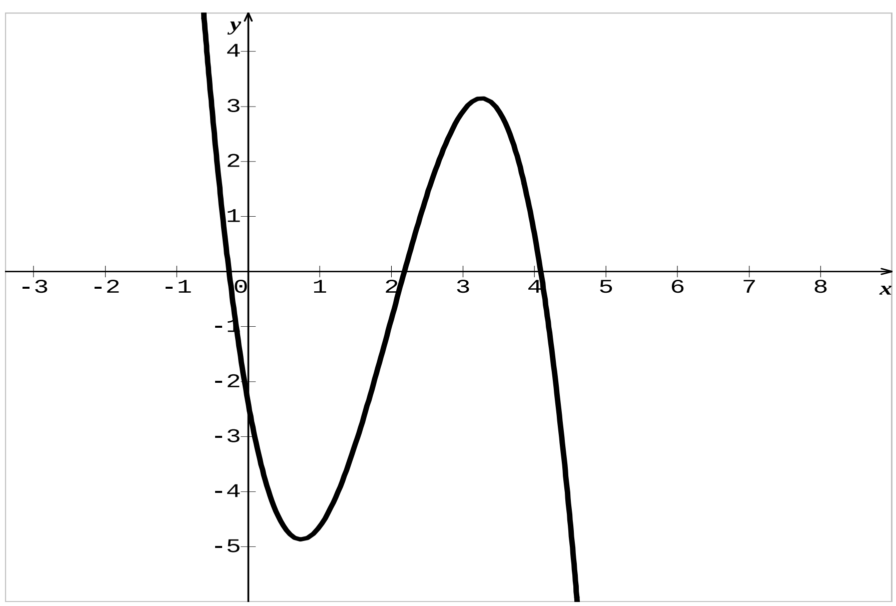
-ផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប

ចំណុចរបត់ $I\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប ។

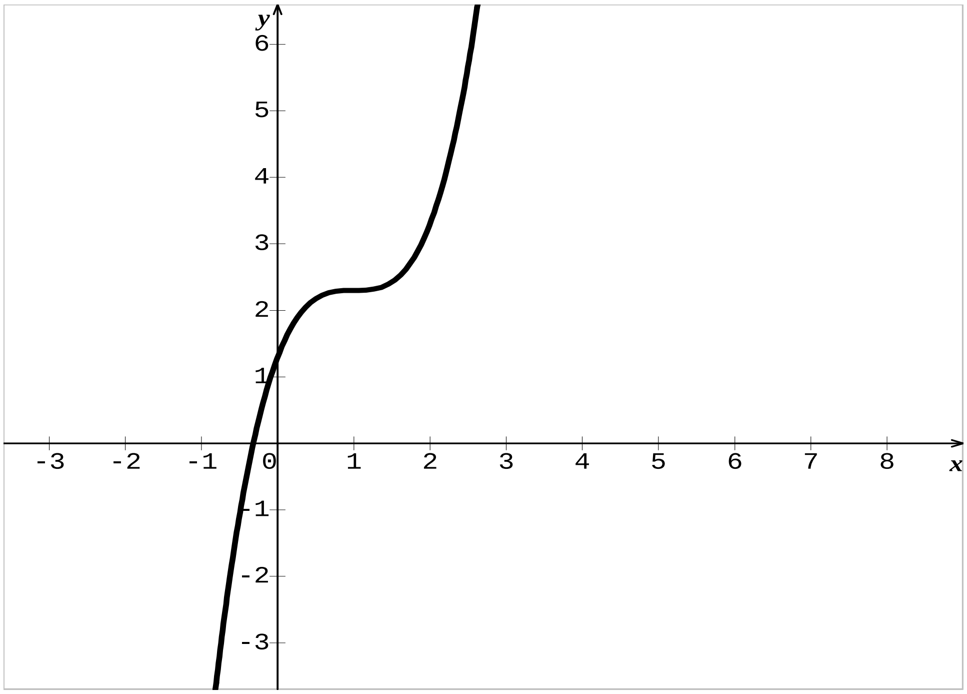
-ករណី $f'(x)=0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នានិង $a>0$



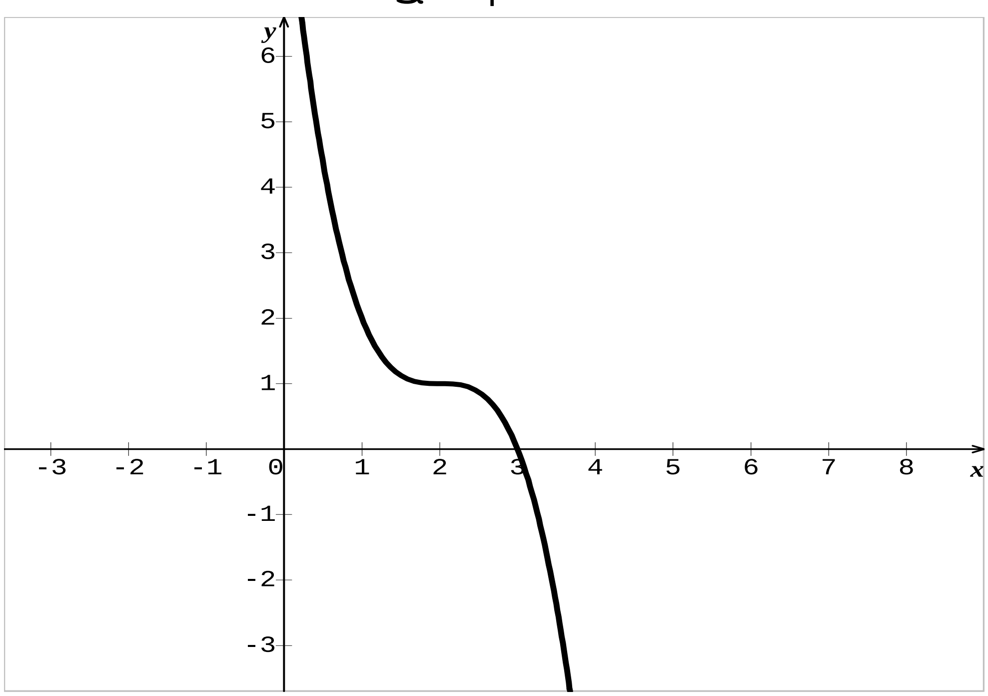
-ករណី $f'(x)=0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នានិង $a<0$



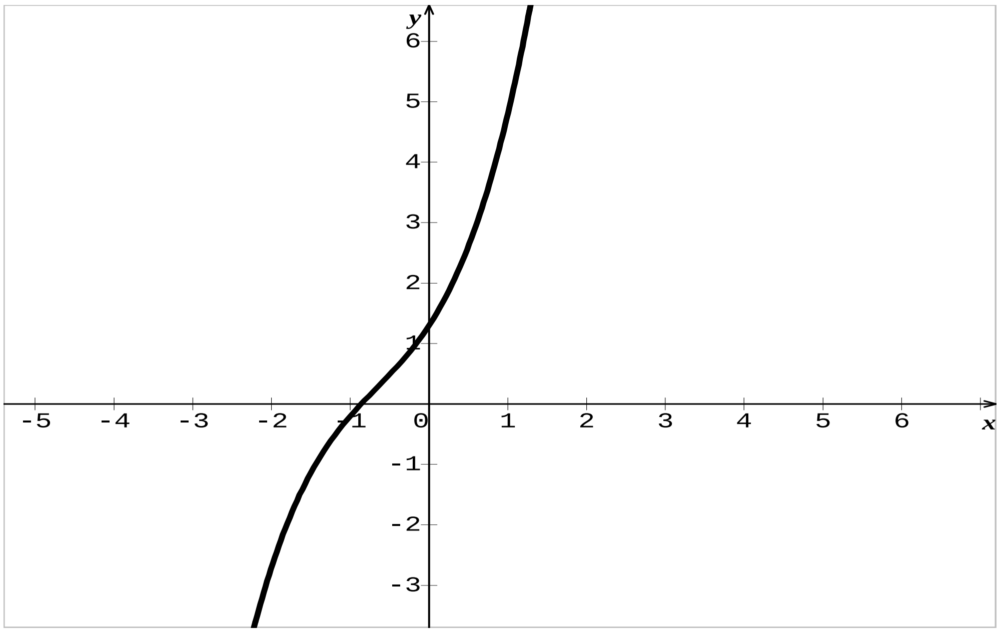
-ករណី $f'(x)=0$ មានឫសឌុបនិង $a>0$



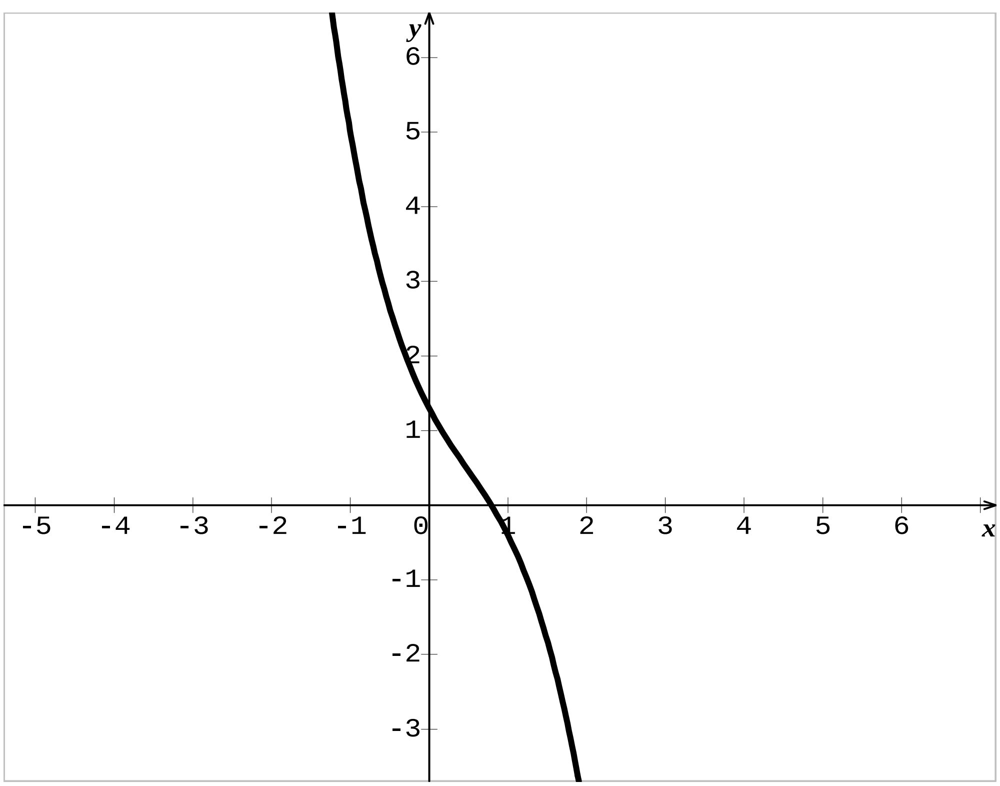
-ករណី $f'(x)=0$ មានឫសឌុបនិង $a<0$



-ករណី $f'(x)=0$ គ្មានឫសនិង $a>0$



-ករណី $f'(x)=0$ គ្មានឫសនិង $a<0$



ឧទាហរណ៍ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបតាងអនុគមន៍

$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មួយ ។

✧ ដែនកំណត់ $D = \Re$

✧ ទិសដៅអថេរភាព

គណនាដេរីវេ $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

បើ $3x^2 - 12x + 9 = 0$ នោះ $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a} = 3$

តារាងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

អនុគមន៍មានអតិបរមាធៀបមួយគឺ $f(1) = 2$ និង អប្បបរមាធៀបមួយគឺ $f(3) = -2$ ។

គណនាលីមីត $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ និង $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

✧សំណង់ក្រាប

-រកចំណុចរបត់

រកដេរីវេទីពីរ $f''(x)=6x-12$ មានឬស $x=2$

តារាងសញ្ញានៃ $f''(x)$

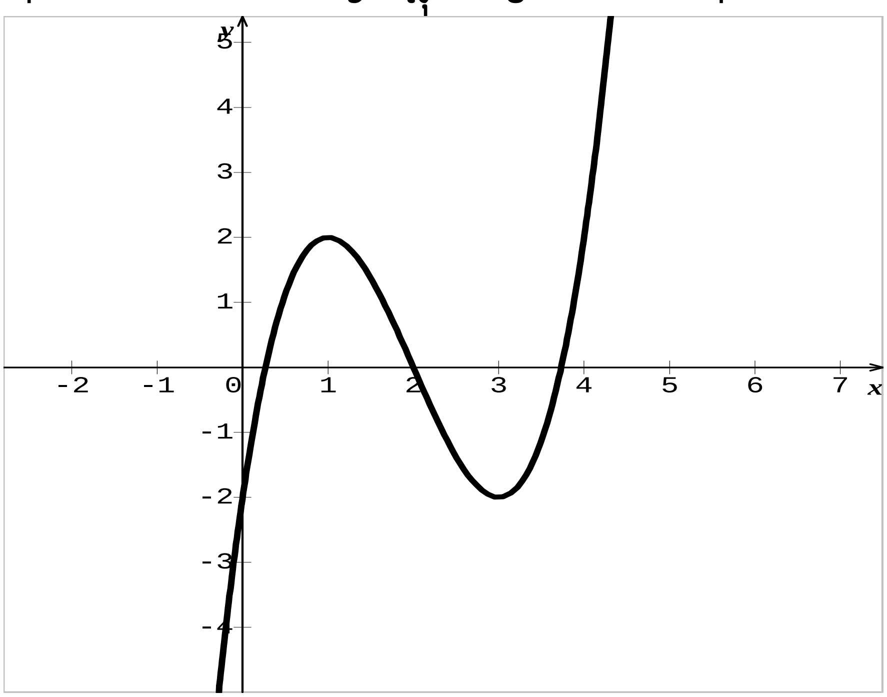
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

ដោយត្រង់ចំណុច $x=2$ អនុគមន៍ $f''(x)$ ប្តូរសញ្ញានោះក្រាប

តាងអនុគមន៍មាន $I(2,0)$ ជាចំណុចរបត់ ។

ផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប

ចំណុចរបត់ $I(2,0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ ។



៤-សិក្សាអនុគមន៍រាង $y = ax^4 + bx^2 + c$

ដែល $a \neq 0$, $a,b,c \in \Re$ ។

របៀបដោះស្រាយ

✧ ដែនកំណត់ $D = \Re$

✧ ទិសដៅអថេរភាព

គណនាដេរីវេ $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$

-បើ $\frac{b}{a} \geq 0$ សមីការ $y' = 0$ មានឫសតែមួយគត់គឺ $x = 0$ ។

-បើ $\frac{b}{a} < 0$ សមីការ $y' = 0$ មានឫសបីផ្សេងគ្នា ។

គណនាលីមីត $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{បើ} \quad a > 0 \\ -\infty & \text{បើ} \quad a < 0 \end{cases}$

ចំណុចរបត់

គណនាដេរីវេទីពីរ $y'' = 12ax^2 + 2b$

-បើ $\frac{b}{a} \geq 0$ សមីការ $y'' = 0$ មានឫសឌុប ឬ គ្មានឫស នោះក្រាបតាងអនុគមន៍គ្មានចំណុចរបត់ ។

-បើ $\frac{b}{a} < 0$ សមីការ $y'' = 0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នានោះក្រាបតាងអនុគមន៍មានចំណុចរបត់ពីរ ។

តារាងអថេរភាព

-ករណីសមីការ $y' = 0$ មានឫសបីផ្សងគ្នានិង $a > 0$

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	m_1	↗	m_2	↘	m_3	↗	$+\infty$

-ករណីសមីការ $y'=0$ មានឫសបីផ្សេងគ្នានិង $a<0$

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	m_1	↘	m_2	↗	m_3	↘	$-\infty$

-ករណីសមីការ $y'=0$ មានឫសតែមួយគត់និង $a<0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	c	↘	$-\infty$

-ករណីសមីការ $y'=0$ មានឫសតែមួយគត់និង $a<0$

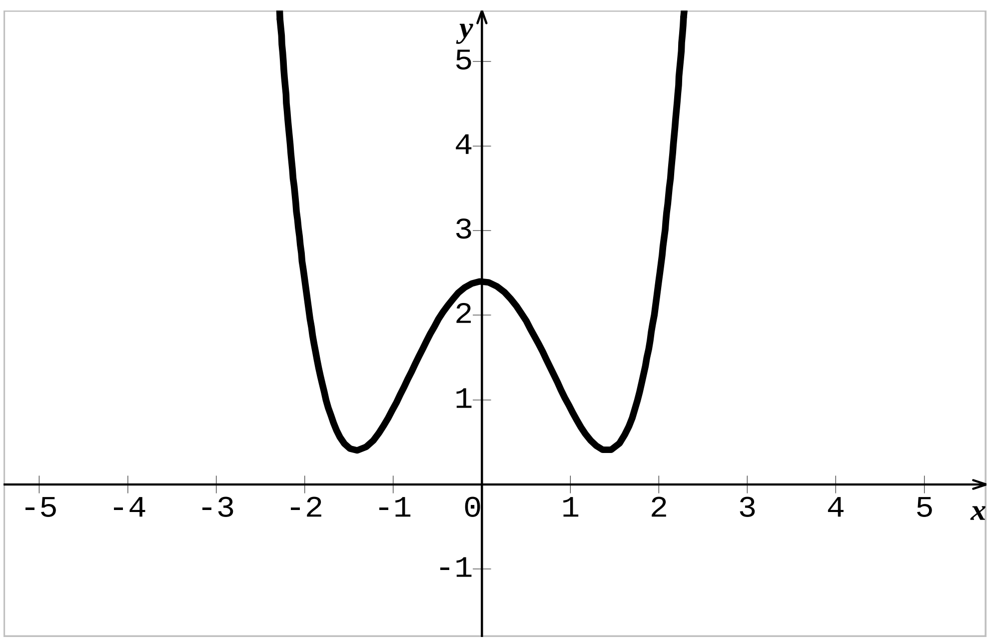
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	c	$\nearrow$	$+\infty$

✧ សំណង់ក្រាប

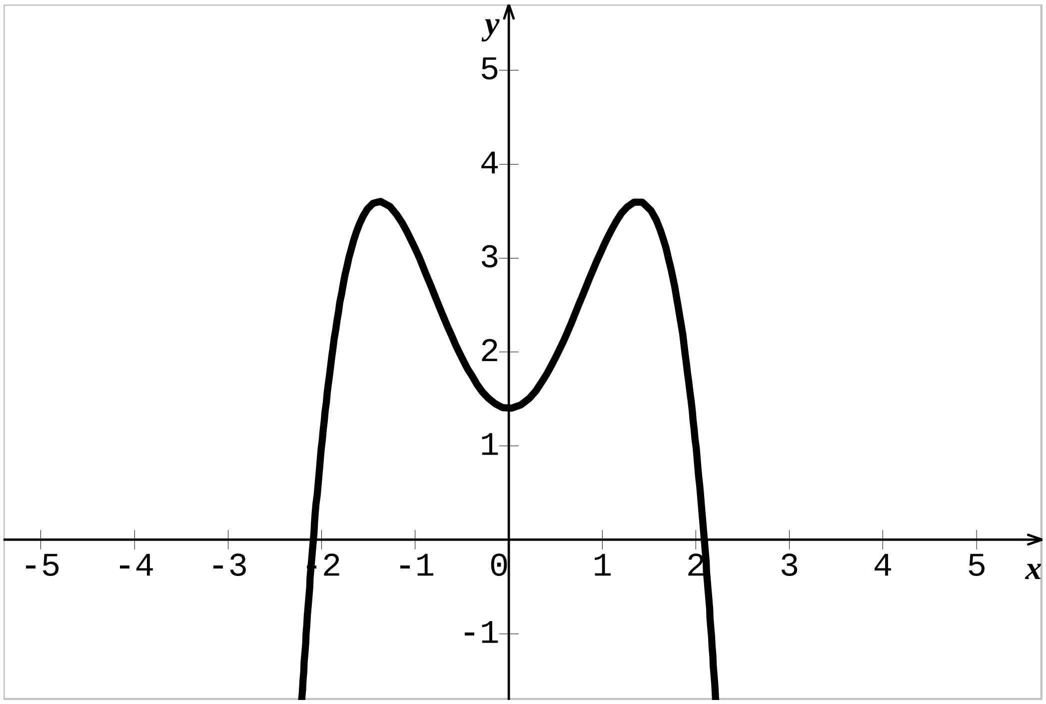
ដោយ $y=ax^4+bx^2+c$ ជាអនុគមន៍គូព្រោះ $y(-x)=y(x)$

នោះអក្ស័អរដោនេជាអក្ស័ឆ្លុះនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ ។

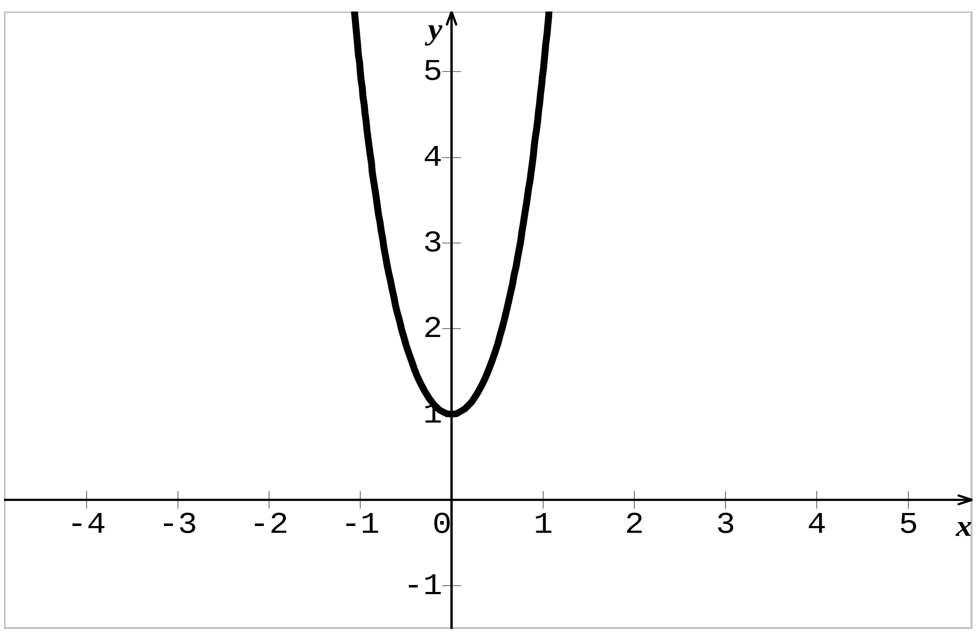
-ករណីសមីការ $y'=0$ មានឬសបីផ្សេងគ្នានិង $a>0$



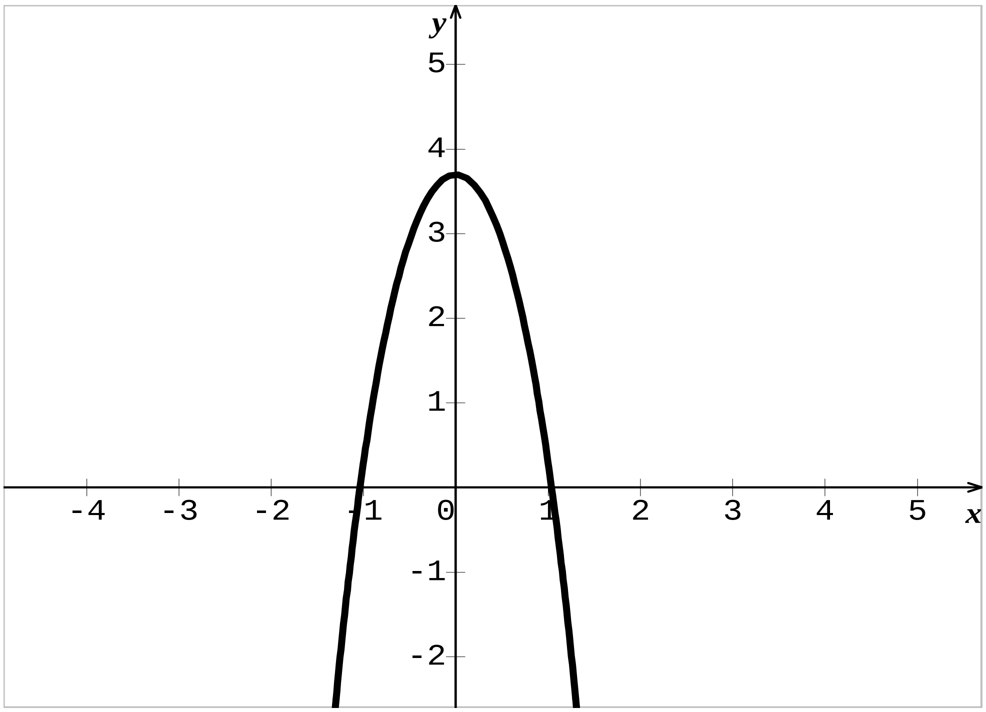
-ករណីសមីការ $y'=0$ មានឫសបីផ្សេងគ្នានិង $a<0$



-ករណីសមីការ $y'=0$ មានឫសតែមួយគត់និង $a>0$



-ករណីសមីការ $y'=0$ មានឫសតែមួយគត់និង $a<0$



ឧទាហរណ៍ សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបតំណាងអនុគមន៍

$y=f(x)=\frac{x^4}{2}-3x^2+\frac{5}{2}$ ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មួយ ។

✧ ដែនកំណត់ $D=\Re$

✧ ទិសដៅអថេរភាព

គណនាដេរីវេ $y'=2x^3-6x=2x(x^2-3)$

បើ $y'=2x^3-6x=2x(x^2-3)=0$ មានឫស

$x_1=0$, $x_2=-\sqrt{3}$, $x_3=\sqrt{3}$ ។

តារាងសិក្សាសញ្ញានៃ $y' = 2x(x^2 - 3)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 - 3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

អនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ចំណុច $x = \pm\sqrt{3}$ គឺ $f(\pm\sqrt{3}) = -2$ និងមានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = 0$ គឺ $f(0) = \frac{5}{2}$ ។

គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ ។

ចំណុចរបត់

គណនាដេរីវេទីពីរ $y'' = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1)$

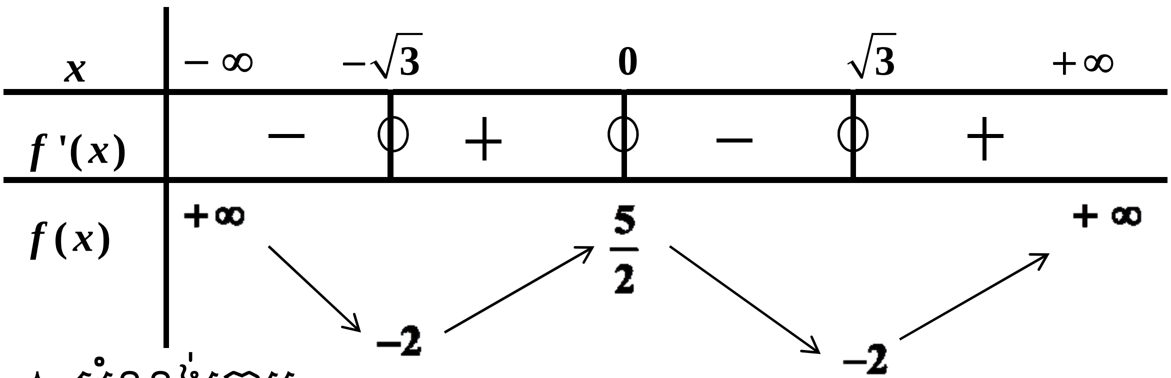
បើ $y' = 6(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ ។

តារាងសិក្សាសញ្ញានៃ $y'' = 6(x^2 - 1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y''		$+$	0	$-$	0	$+$	

ដោយត្រង់ $x = -1$ និង $x = 1$ មអនុគមន៍ y''ប្តូរសញ្ញានោះ ក្រាបវាមានចំណុចរបត់ពីរគឺ $I_1(-1\,,0)$ និង $I_2(1,0)$ ។

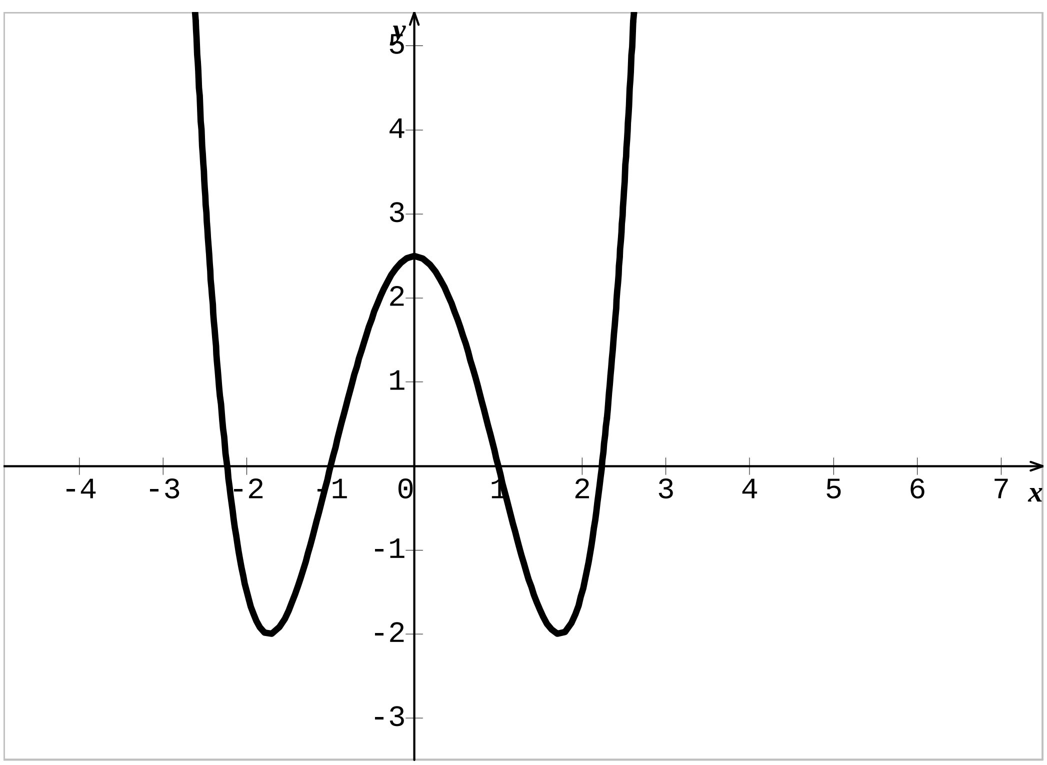
តារាងអថេរភាព



✧ សំណង់ក្រាប

ដោយ $y=\frac{x^4}{2}-2x^2+\frac{5}{2}$ ជាអនុគមន៍គូព្រោះ $y(-x)=y(x)$

នោះអក្ស័អរដោនេជាអក្ស័ឆ្លុះនៃក្រាបតាងអនុគមន៍។



៥-សិក្សាអនុគមន៍រាង $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$

ដែល $\mathbf{a\neq 0}$, $\mathbf{p\neq 0}$ និង $\mathbf{ax_0^2+bx_0+c\neq 0}$ គ្រប់ $\mathbf{x_0=-\dfrac{q}{p}}$

☞ ដែនកំណត់ ៖ $\mathbf{D=IR-\{-\dfrac{q}{p}\}}$

☞ ដេរីវេ $\mathbf{f'(x)=\dfrac{apx^2+2aqx+bq-cp}{(px+q)^2}}$

-បើ $\mathbf{f'(x)=0}$ គ្មានឫសនោះអនុគមន៍គ្មានបរមាទេ ។

-បើ $\mathbf{f'(x)=0}$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នានោះអនុគមន៍មានអតិបរមាមួយនិងអប្បបរមាមួយ ។

☞ អាស៊ីមតូត ៖

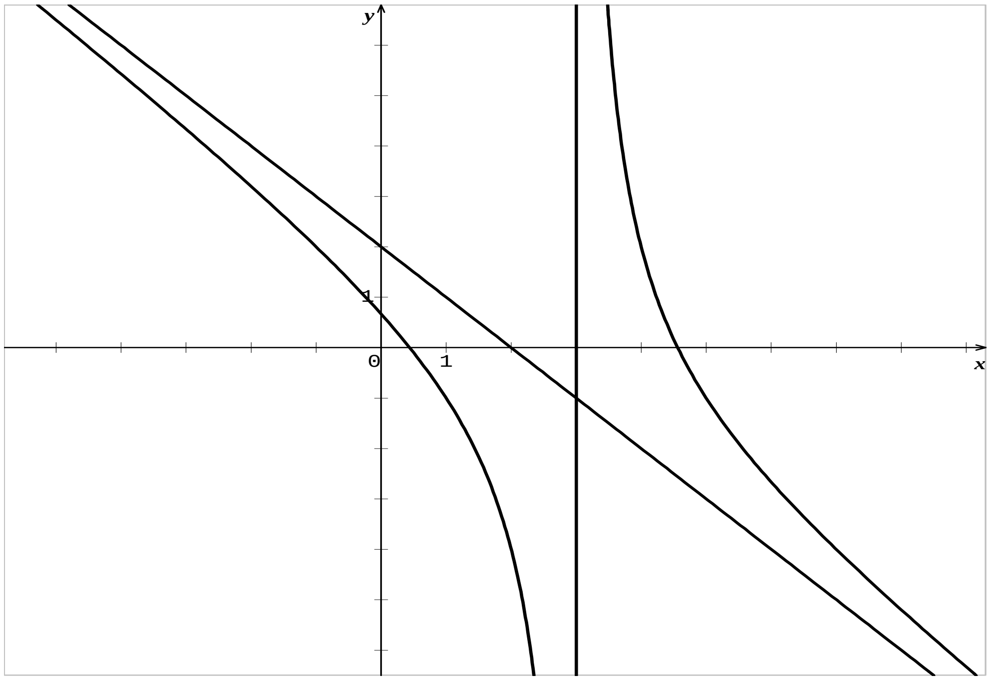
-បន្ទាត់ $\mathbf{x=-\dfrac{p}{q}}$ ជាអាស៊ីតមតូតឈរ ។

-បើអនុគមន៍អាចសរសេរ $\mathbf{f(x)=\alpha x+\beta+\dfrac{\gamma}{px+q}}$ នោះបន្ទាត់មានសមីការ $\mathbf{y=\alpha x+\beta}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

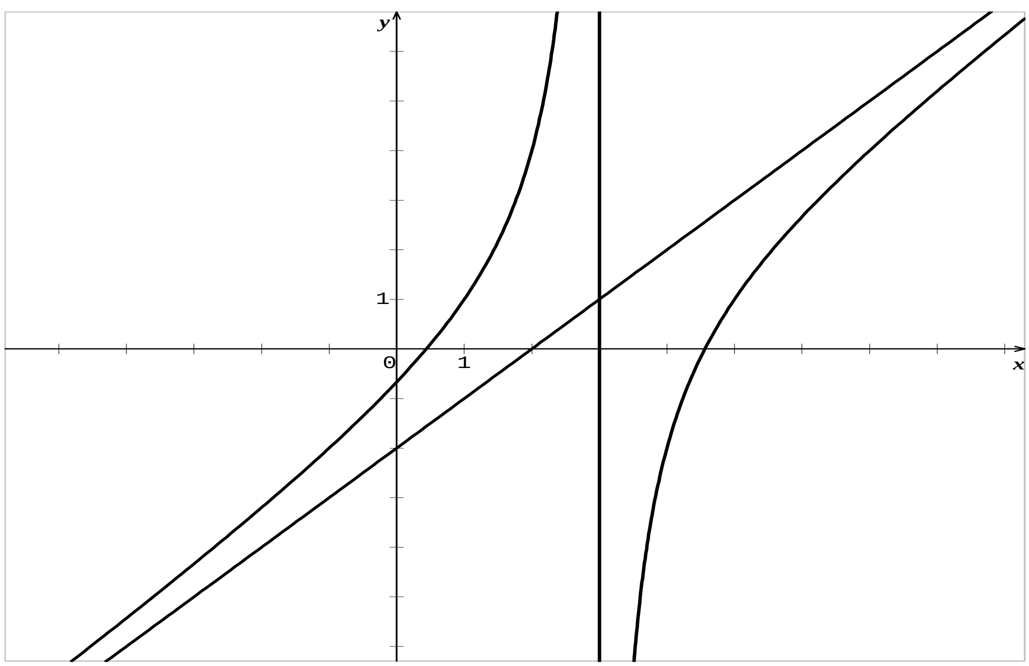
-ចំណុចប្រសព្វរវាងអាស៊ីមតូតទាំងពីរជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប ។

◈ ក្រាបមានរាងទូទៅដូចរូបខាងក្រោម ៖

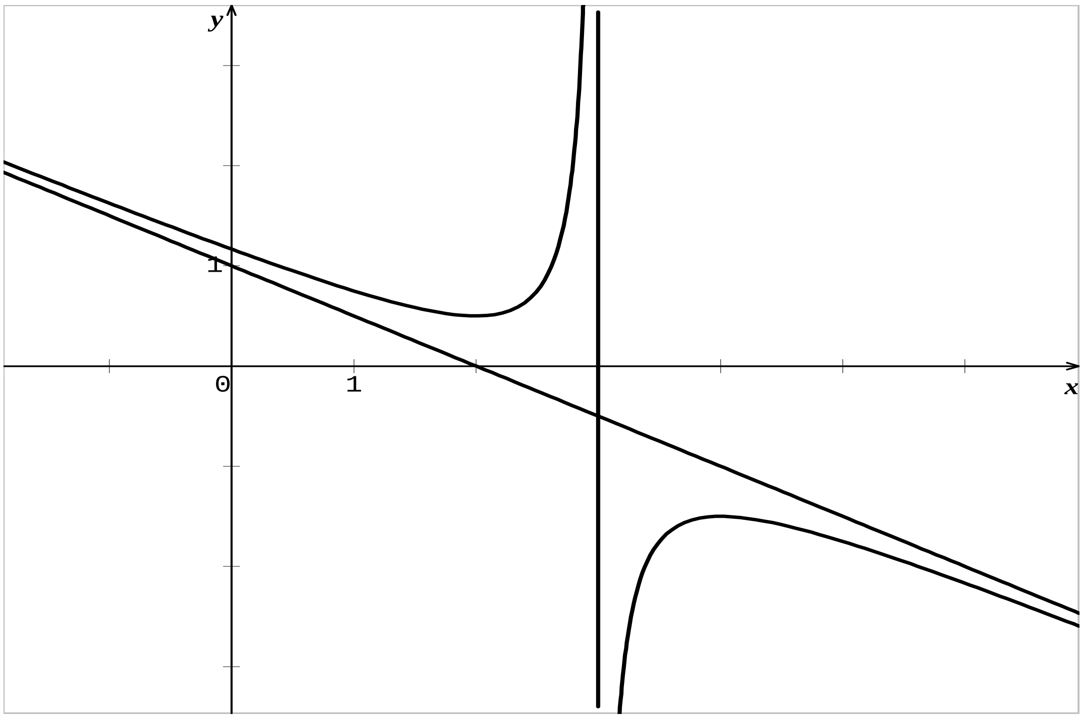
1/ករណី $ap < 0$ និង $f'(x) = 0$ គ្មានឫស



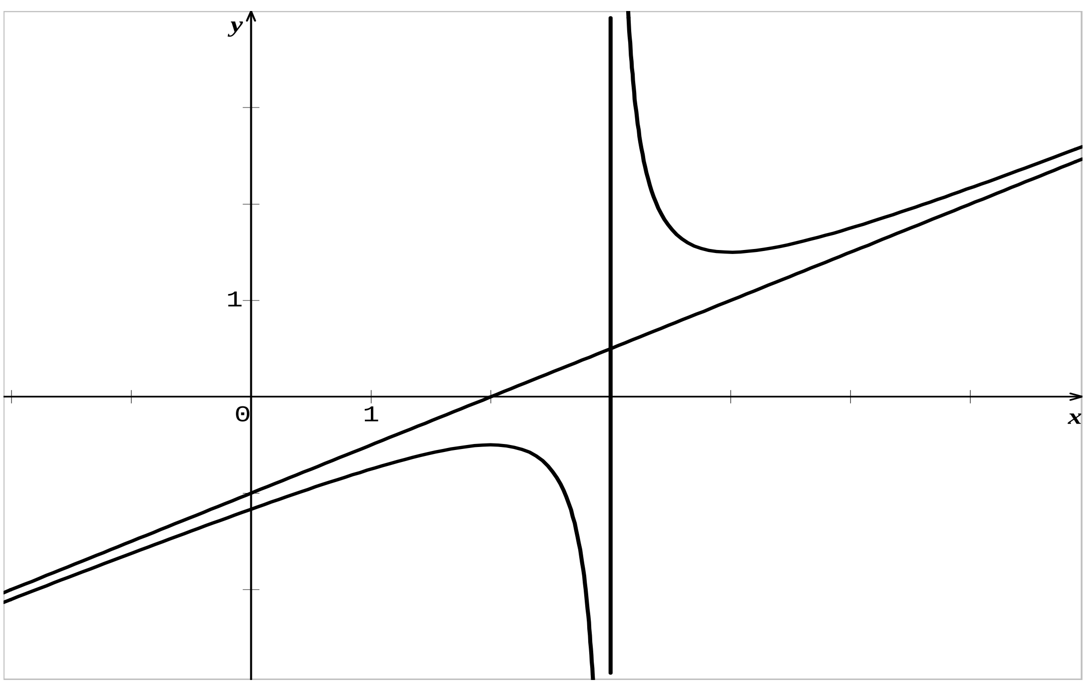
2/ករណី $ap > 0$ និង $f'(x) = 0$ គ្មានឫស



3/ករណី $ap < 0$ និង $f'(x) = 0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា



4/ករណី $ap > 0$ និង $f'(x) = 0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា



ឧទាហរណ៍១

គេឲ្យអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ កំណត់ដោយ $\mathbf{f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-1}}$

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាប $\mathbf{(c)}$ តាងអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ ក្នុងតម្រុយ

អរតូនរម៉ាល់ $\mathbf{(o,\vec{i},\vec{j})}$ ។

ដំណោះស្រាយ

•ដែនកំណត់ $\mathbf{D=IR-\{\,1\,\}}$

•សរសេរជារាងកាណូនិក

$$\mathbf{f(x)=\frac{x^2-x-6}{x-1}=\frac{x(x-1)-6}{x-1}=x-\frac{6}{x-1}}$$

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $\mathbf{f'(x)=(x-\dfrac{6}{x-1})'=1+\dfrac{6}{(x-1)^2}>0}$ គ្រប់ $\mathbf{x\in D}$

នោះ $\mathbf{f}$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើដែនកំណត់របស់វា ។

-គណនាលីមីត

$$\mathbf{\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-\frac{6}{x-1})=+\infty}$$

$$\mathbf{\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-\frac{6}{x-1})=-\infty}$$

$$\mathbf{\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(x-\frac{6}{x-1})=+\infty}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(x-\frac{6}{x-1}\right) = -\infty$$

-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(x-\frac{6}{x-1}\right) = \infty$ នោះបន្ទាត់សមីការ

$x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

ម្យ៉ាងទៀត $f(x) = x - \frac{6}{x-1}$ ហើយ

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to\infty}\frac{-6}{x-1} = 0$$

ដូចនេះបន្ទាត់មានសមីការ $y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប ។

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗ $+\infty$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

•សំណង់ក្រាប

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអក្ស័ $(x'ox)$:

$y = 0$ សមមូល $\frac{x^2-x-6}{x-1} = 0$ ឬ $x^2 - x - 6 = 0$

$\Delta = 1 + 24 = 25$ មានឫស $x_1 = \dfrac{1-5}{2} = -2$, $x_2 = \dfrac{1+5}{2} = 3$ ។

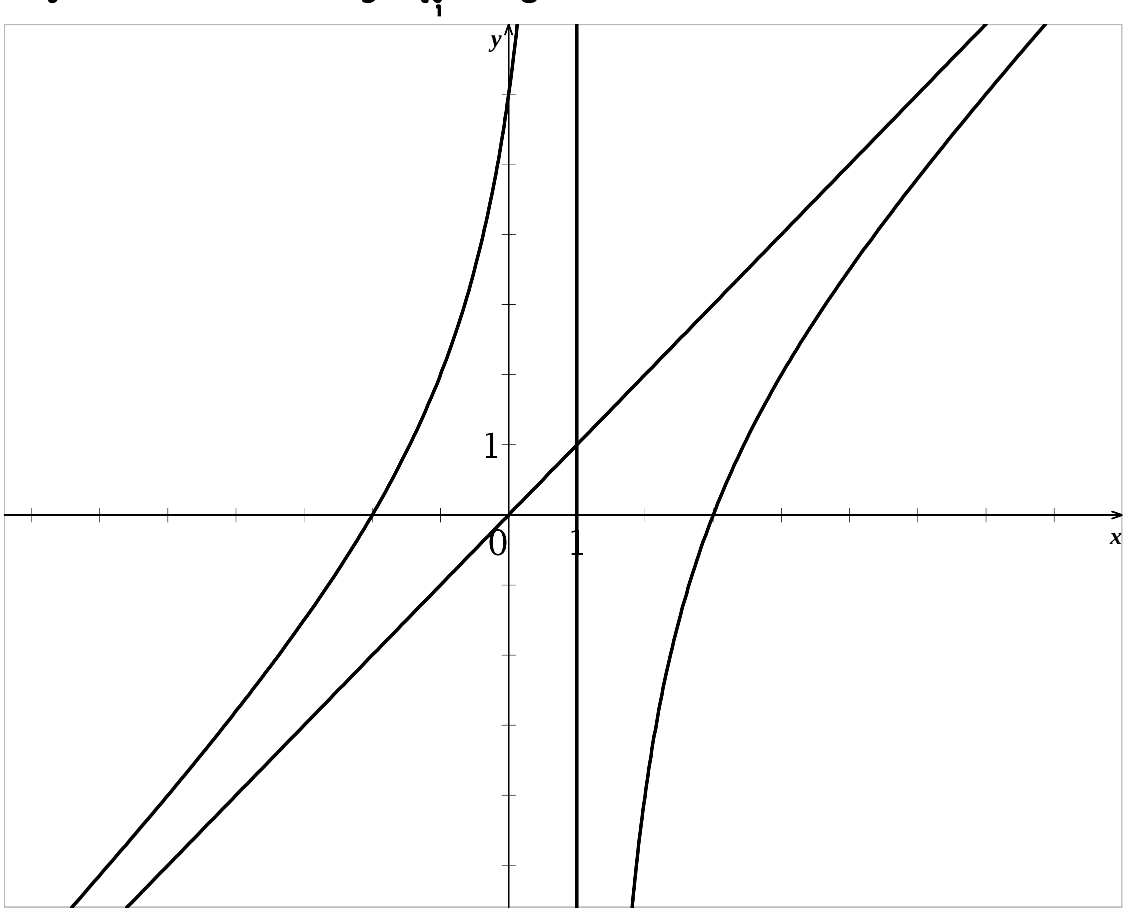
-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអក្ស័ $(y'oy)$:

$x = 0$ នោះ $y = \dfrac{-6}{-1} = 6$ ។

-ផ្ចិតឆ្លុះ អាស៊ីមតូតឈរ $x = 1$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = x$ កាត់គ្នាត្រង់ $I(1,1)$ដោយ $f(2a - x) + f(x) = f(2 - x) + f(x)$

$$= 2 - x - \frac{6}{1-x} + x - \frac{6}{x-1} = 2 = 2b$$

ដូចនេះ $I(1,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប ។



ឧទាហរណ៍២

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{2-x}$

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាប (c) តាងអនុគមន៍នេះ។

ដំណោះស្រាយ

•ដែនកំណត់ $D=IR-\{\ 2\ \}$

•សរសេរជារាងកាណូនិក

$$f(x)=\frac{x^2-5x+4}{2-x}=-x+3-\frac{2}{2-x}$$

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ

$$f'(x)=(-x+3-\frac{2}{2-x})'=-1-\frac{2}{(2-x)^2}<0\ \forall x\in D$$

នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះជានិច្ចលើដែនកំណត់របស់វា ។

-គណនាលីមីត

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-x+3-\frac{2}{2-x})=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-x+3-\frac{2}{2-x})=+\infty$$

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}(-x+3-\frac{2}{2-x})=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(-x+3-\frac{2}{2-x}) = +\infty$$

-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(-x+3-\frac{2}{2-x}) = \infty$ នោះបន្ទាត់សមីការ $x = 2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

ម្យ៉ាងទៀត $f(x) = -x+3-\frac{2}{2-x}$ ហើយ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{2-x} = 0$

ដូចនេះបន្ទាត់មានសមីការ $y = -x+3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត -តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$--$	‖	$--$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

•សំណង់ក្រាប

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអក្ស័ $(x'ox)$:

$y = 0$ សមមូល $\frac{x^2-5x+4}{2-x} = 0$ ឬ $x^2-5x+4 = 0$

$a+b+c = 0$ មានឬស $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ ។

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអក្ស័ $(y'oy)$:

$x=0$ នោះ $y=\frac{4}{2}=2$ ។

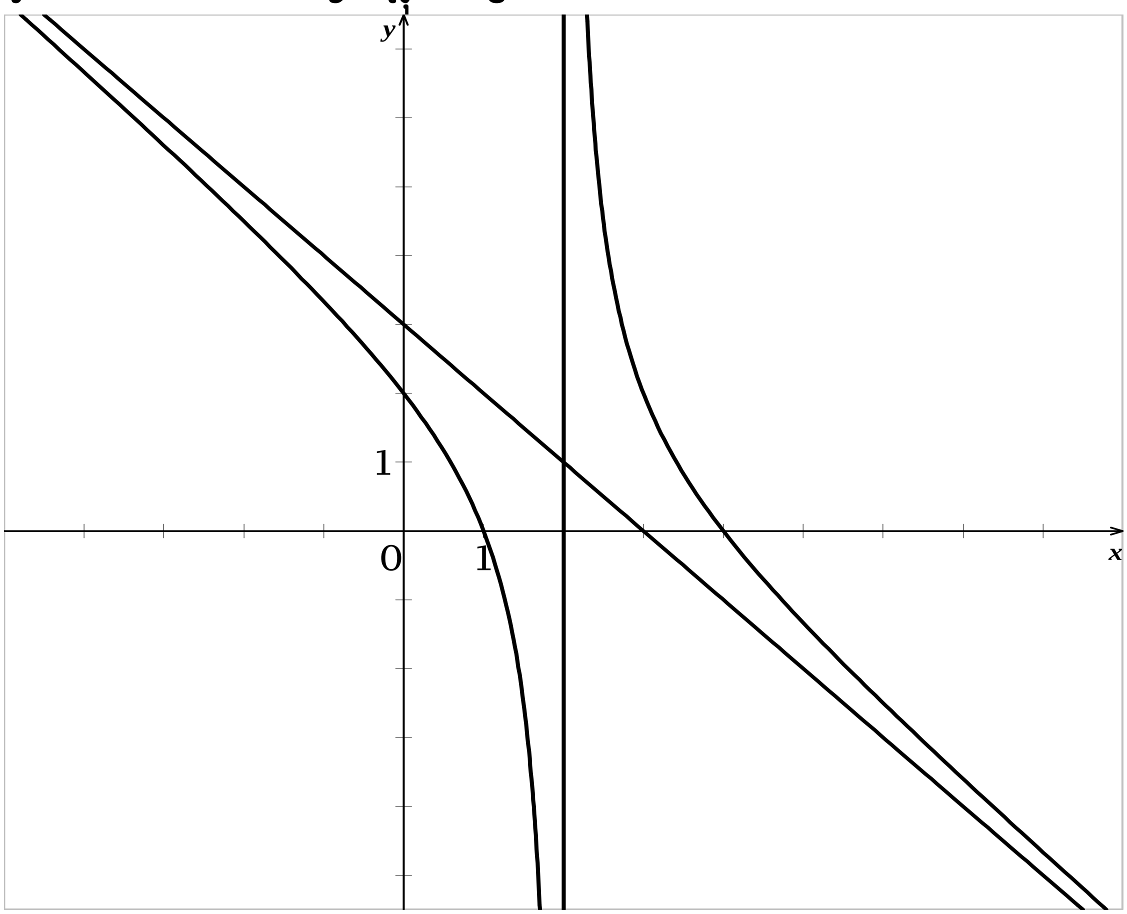
-ផ្ចិតឆ្លុះ

អាស៊ីមតូតឈរ $x=2$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=-x+3$ កាត់គ្នាត្រង់ ចំណុច $I(2,1)$ ។

ដោយ $f(2a-x)+f(x)=f(4-x)+f(x)$

$$=x-1-\frac{2}{x-2}-x+3-\frac{2}{2-x}=2=2b$$

ដូចនេះ $I(2,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប ។



ឧទាហរណ៍៣

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{x^2+3x+3}{x+1}$

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាប (c) តាងអនុគមន៍ f ។

ដំណោះស្រាយ

•ដែនកំណត់ $D=IR-\{-1\}$

•សរសេរជារាងកាណូនិក

$$f(x)=\frac{x^2+3x+3}{x+1}=x+2+\frac{1}{x+1}$$

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $f'(x)=(x+2+\frac{1}{x+1})'=1-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0$ គេបាន $x(x+2)=0$ នោះ $x_1=0$, $x_2=-2$ ។

-បរមានៃ f

ចំពោះ $x=-2$ អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀប $f(-2)=-1$ ។

ចំពោះ $x=0$ អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាធៀប $f(0)=3$ ។

-គណនាលីមីត

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+2+\frac{1}{x+1})=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+2+\frac{1}{x+1})=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}\left(x+2+\frac{1}{x+1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\left(x+2+\frac{1}{x+1}\right) = +\infty$$

-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}\left(x+2+\frac{1}{x+1}\right) = \infty$ នោះបន្ទាត់

សមីការ $x=-1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

ម្យ៉ាងទៀត $f(x) = x+2+\frac{1}{x+1}$ ហើយ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x+1} = 0$

ដូចនេះបន្ទាត់មានសមីការ $y = x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

•សំណង់ក្រាប

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអក្ស័ $(x'ox)$:

$y=0$ សមមូល $\frac{x^2+3x+3}{x+1} = 0$ ឬ $x^2+3x+3=0$

$\Delta = 9-12 < 0$ សមីការគ្មានឬស ។

នោះក្រាបណៃអនុគមន៍មិនកាត់អក្សអាប់ស៊ីសទេ ។

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអក្ស $(y'oy): x=0$ នោះ $y=\frac{3}{1}=3$

-ផ្ចិតឆ្លុះ

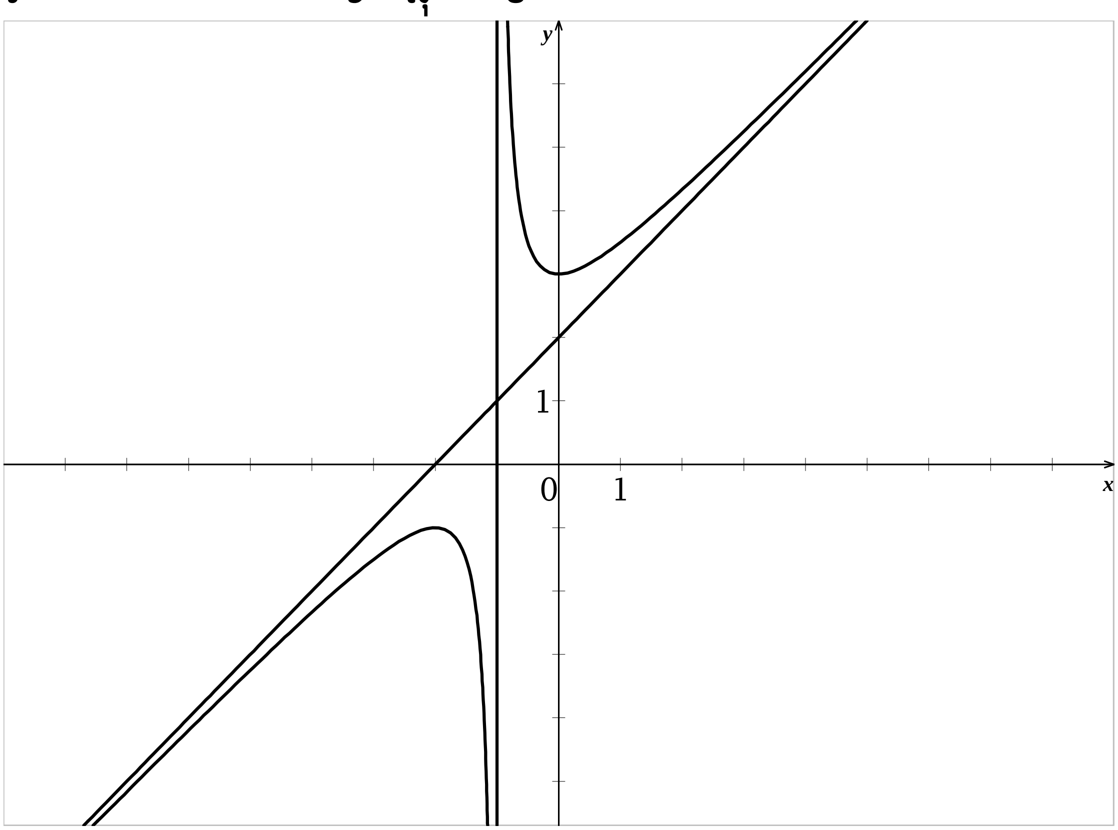
អាស៊ីមតូតឈរ $x=-1$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=x+2$ កាត់គ្នាត្រង់ចំណុច $I(-1,1)$ ។

ដោយ $f(2a-x)+f(x)=f(-2-x)+f(x)$

$$=-x+\frac{1}{-1-x}+x+2+\frac{1}{x+1}$$

$$=2=2b$$

ដូចនេះ $I(-1,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប ។



ឧទាហរណ៍៨

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{-x^2+5x-4}{2x}$

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាប (c) តាងអនុគមន៍ f ។

ដំណោះស្រាយ

•ដែនកំណត់ $D=IR^*$

•សរសេរជារាងកាណូនិក

$$f(x)=\frac{-x^2+5x-4}{2x}=-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}-\frac{2}{x}$$

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ

$$f'(x)=\left(-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}-\frac{2}{x}\right)'=-\frac{1}{2}+\frac{2}{x^2}$$

$$=\frac{-x^2+4}{x^2}=\frac{(-x+2)(x+2)}{x^2}$$

$f'(x)=0$ គេបាន $x_1=2$, $x_2=-2$ ។

-បរមានៃ f

ចំពោះ $x=2$ អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀប $f(2)=\dfrac{1}{2}$ ។

ចំពោះ $x=-2$ អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាធៀប $f(-2)=\dfrac{9}{2}$ ។

-គណនាលីមីត

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}-\frac{2}{x}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}-\frac{2}{x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}-\frac{2}{x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}-\frac{2}{x}\right)=-\infty$$

-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to}\left(-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}-\frac{2}{x}\right)=\infty$ នោះបន្ទាត់សមីការ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

ម្យ៉ាងទៀត $f(x)=-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}-\frac{2}{x}$ ហើយ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{2}{x}\right)=0$

ដូចនេះបន្ទាត់មានសមីការ $y=-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត។

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	‖	$+$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{9}{2}$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$

•សំណង់ក្រាប

-ផ្ចិតឆ្លុះ

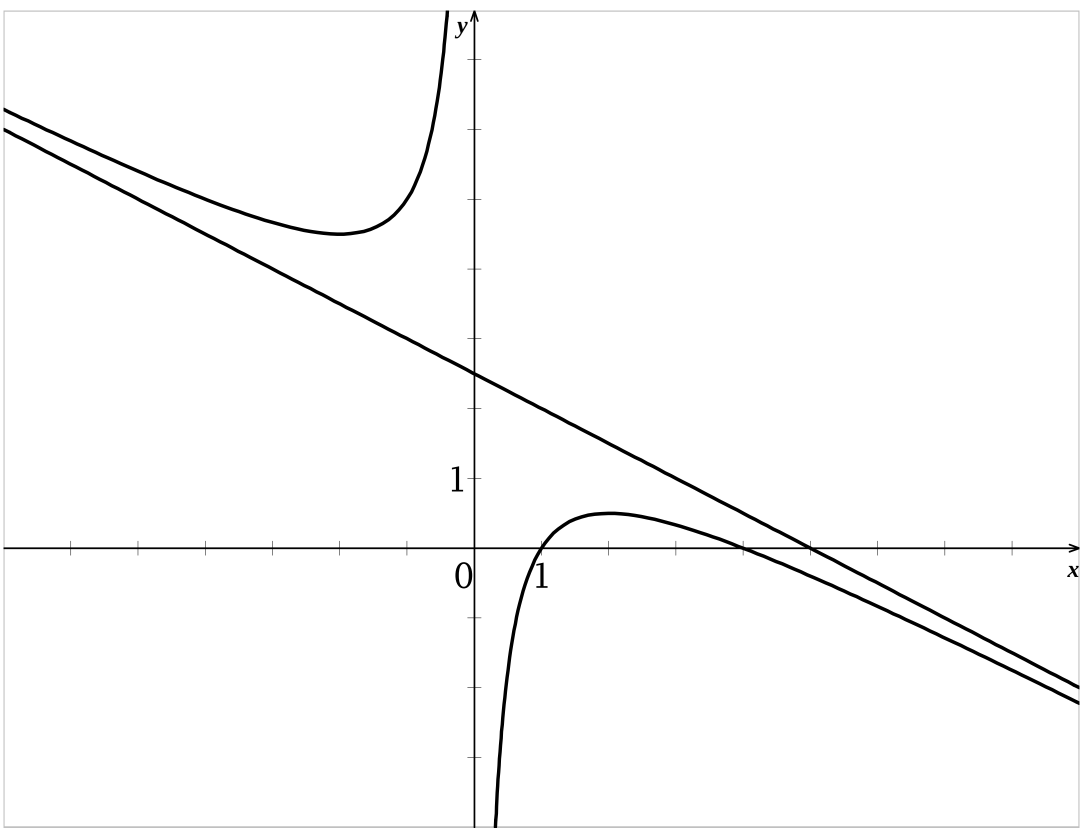
អាស៊ីមតូតឈរ $x=0$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}$ កាត់គ្នាត្រង់ចំណុច $I(0,\frac{5}{2})$ ។

ដោយ $f(2a-x)+f(x)=f(-x)+f(x)$

$$=\frac{x}{2}+\frac{5}{2}+\frac{2}{x}-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}-\frac{2}{x}$$

$$=5=2b$$

ដូចនេះ $I(0,\frac{5}{2})$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប ។



៦-សិក្សាអនុគមន៍រាង $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$

ដែល $\mathbf{a\neq 0}$ និង $\mathbf{p\neq 0}$ ។

☞ ដែនកំណត់ ៖ $\mathbf{D=\{x/px^2+qx+r\neq 0\}}$

☞ ដេរីវេ $\mathbf{f'(x)=\dfrac{(aq-bp)x^2+2(ar-cp)x+(br-cq)}{(px^2+qx+r)^2}}$

-បើ $\mathbf{f'(x)=0}$ គ្មានឫសនោះអនុគមន៍គ្មានបរមាទេ ។

-បើ $\mathbf{f'(x)=0}$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នានោះអនុគមន៍មានអតិបរមាមួយនិងអប្បបរមាមួយ ។

-បើ $\mathbf{f'(x)=0}$ មានឫសមួយនោះអនុគមន៍មានបរមាតែមួយគត់

☞ អាសីុមតូត ៖

-បន្ទាត់ $\mathbf{y=\dfrac{a}{p}}$ ជាអាសីុតមតូតដេកជានិច្ច។

-ចំនួនអាសីុមតូតឈរអាស្រ័យនឹងឫសរបស់សមីការភាគបែង $\mathbf{px^2+qx+r=0}$ ដែលមាន $\mathbf{\Delta=q^2-4pr}$ ។

✓ បើ $\mathbf{\Delta=q^2-4pr<0}$ គ្មានអាសីុមតូតឈរ និង ក្រាបមានតែមួយមែក ។

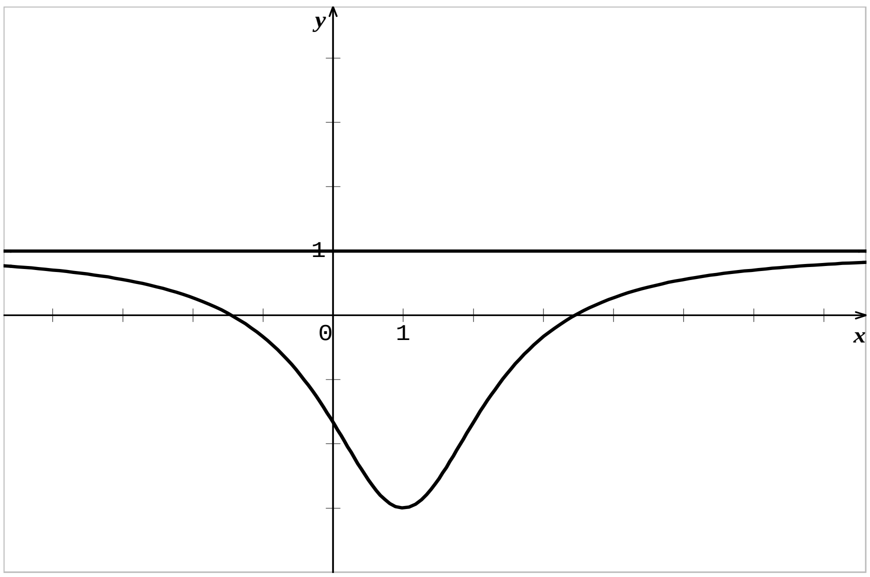
✓ បើ $\mathbf{\Delta=q^2-4pr=0}$ មានអាសីុមតូតឈរ $\mathbf{x=-\dfrac{q}{2p}}$ និងក្រាបមានពីរមែកដាច់ពីគ្នា ។

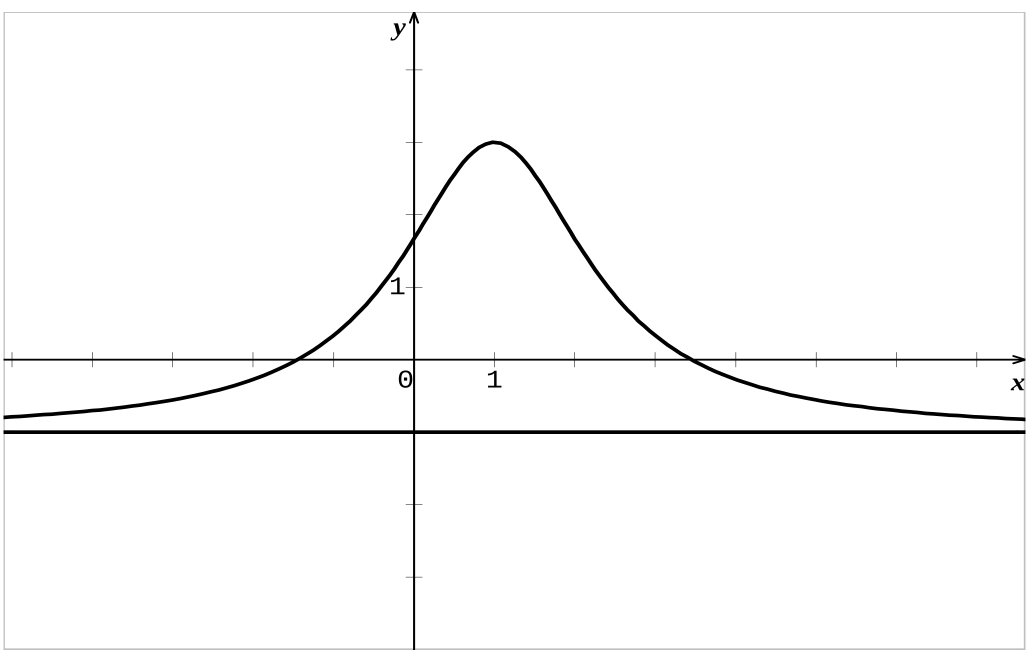
✓ បើ $\Delta = q^2 - 4pr > 0$ មានអាស៊ីមតូតឈរពីរ $x = \dfrac{-q \pm \sqrt{\Delta}}{2p}$

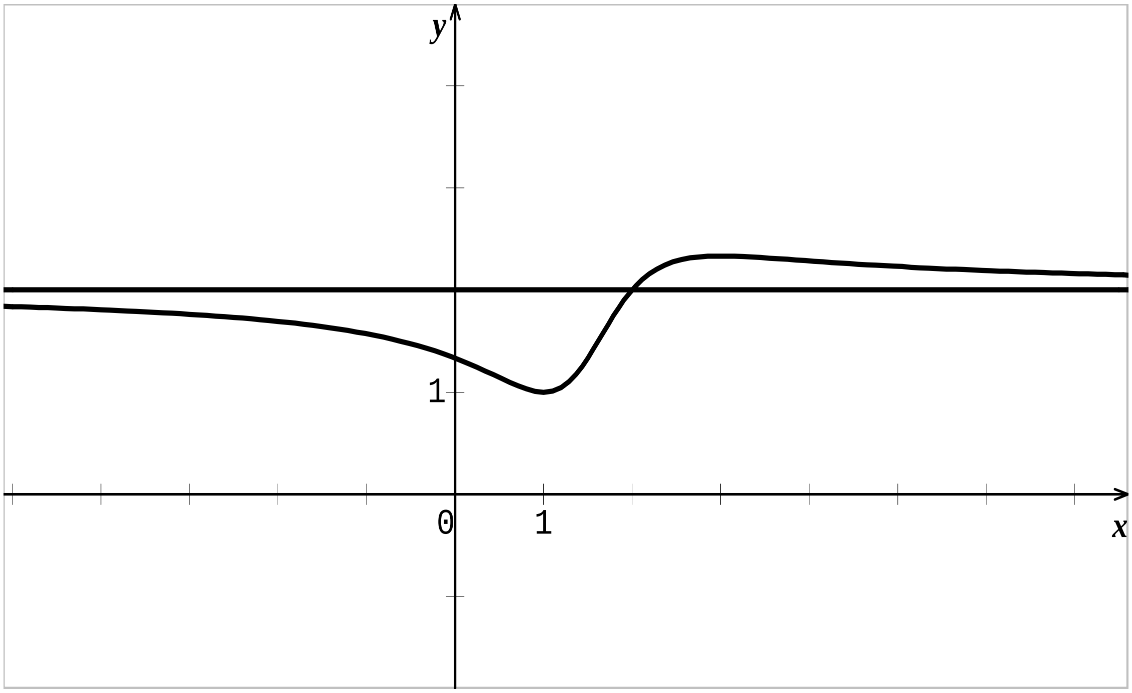
និង ក្រាបមានបីមែកដាច់ពីគ្នា។

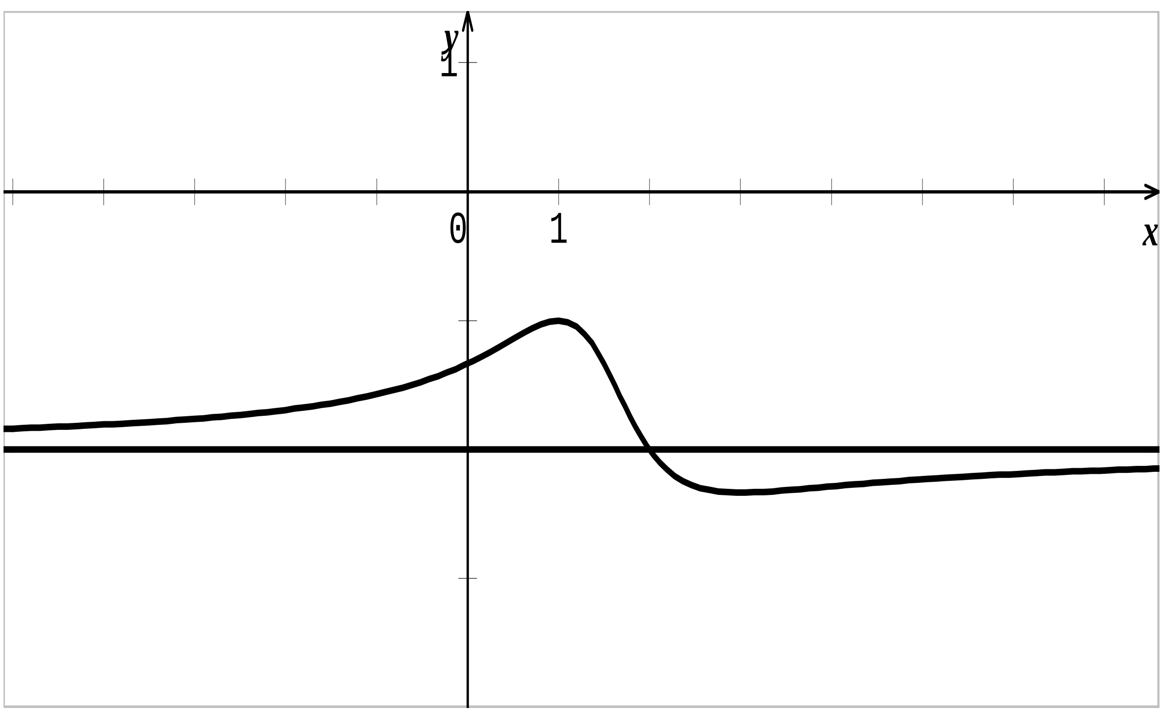
-ក្រាបមានរាងទូទៅដូចរូបខាងក្រោម ៖

1/ករណី $\Delta = q^2 - 4pr < 0$

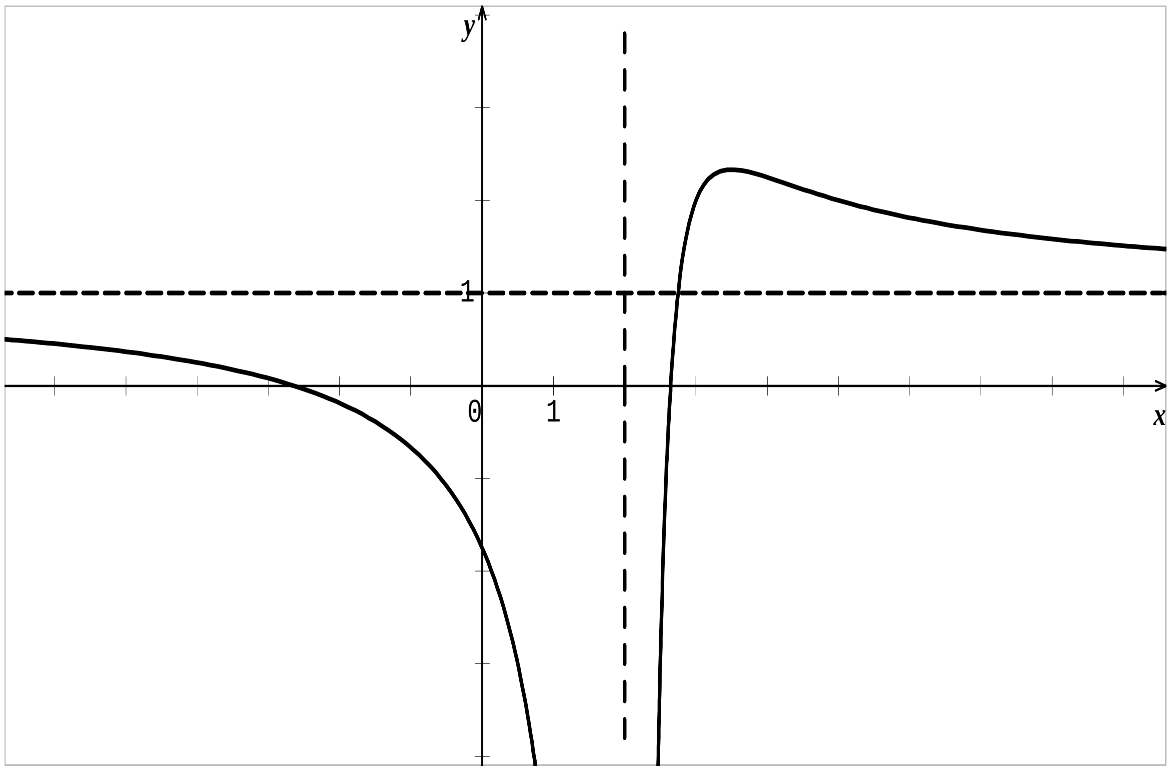


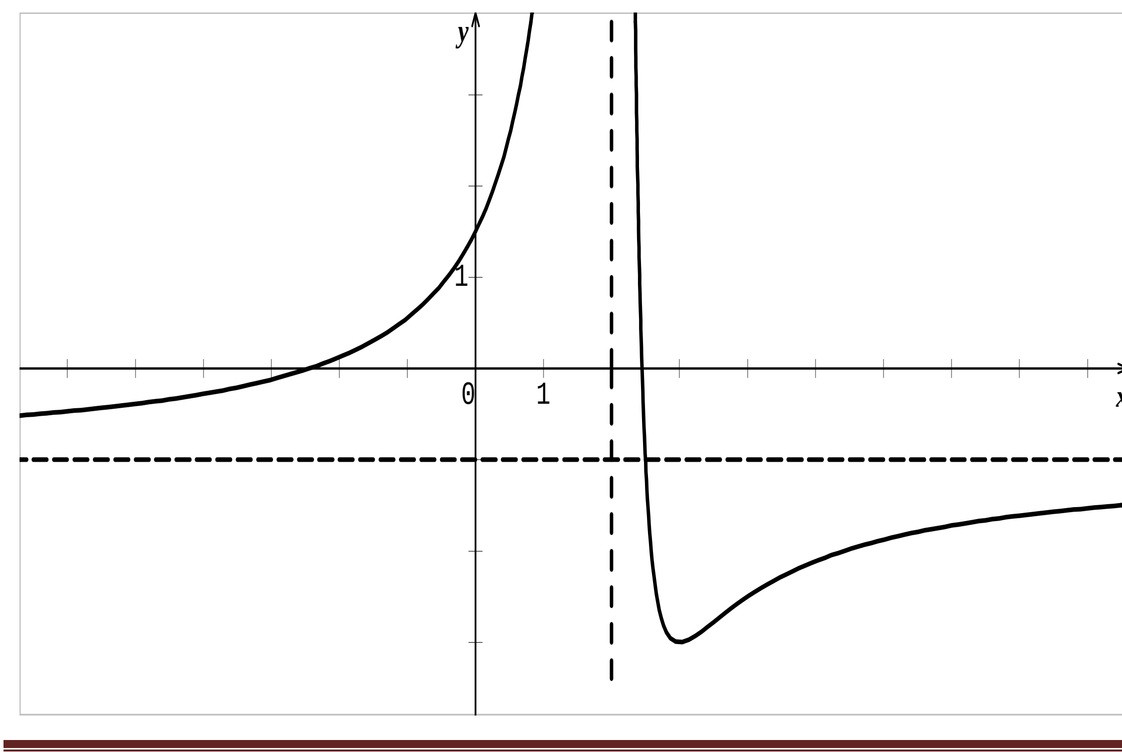


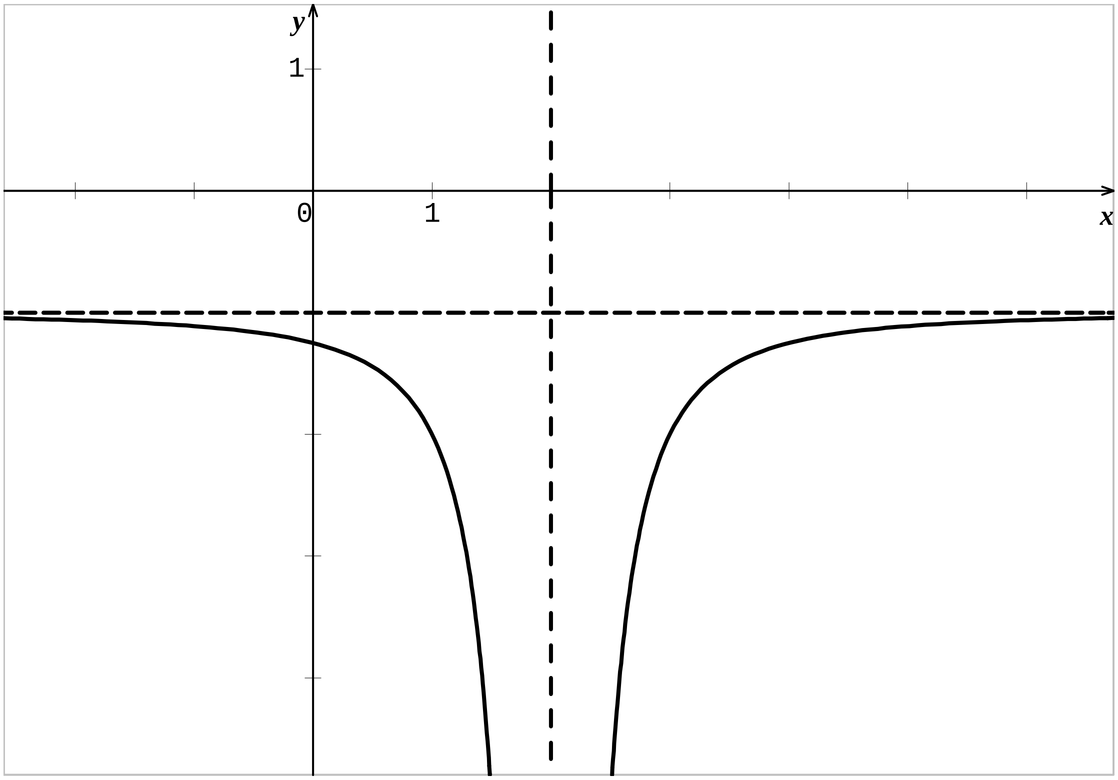

y
1
0
1
x

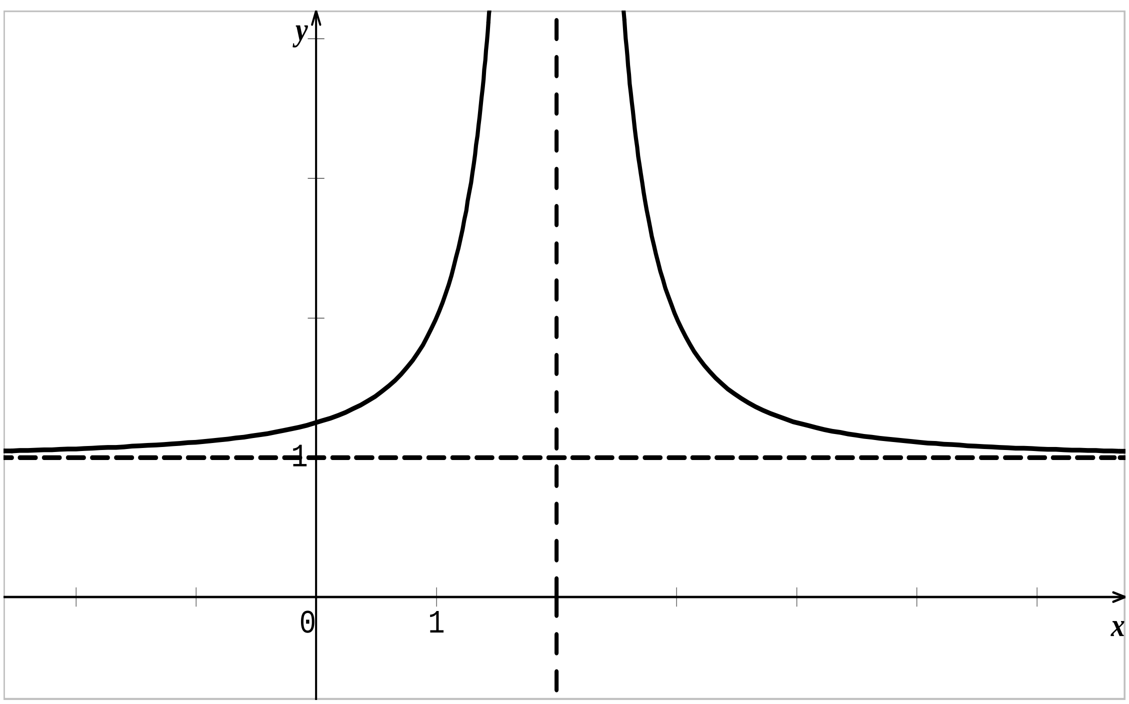

y
1
0
1
x

2/ករណី $\Delta = q^2 - 4pr = 0$

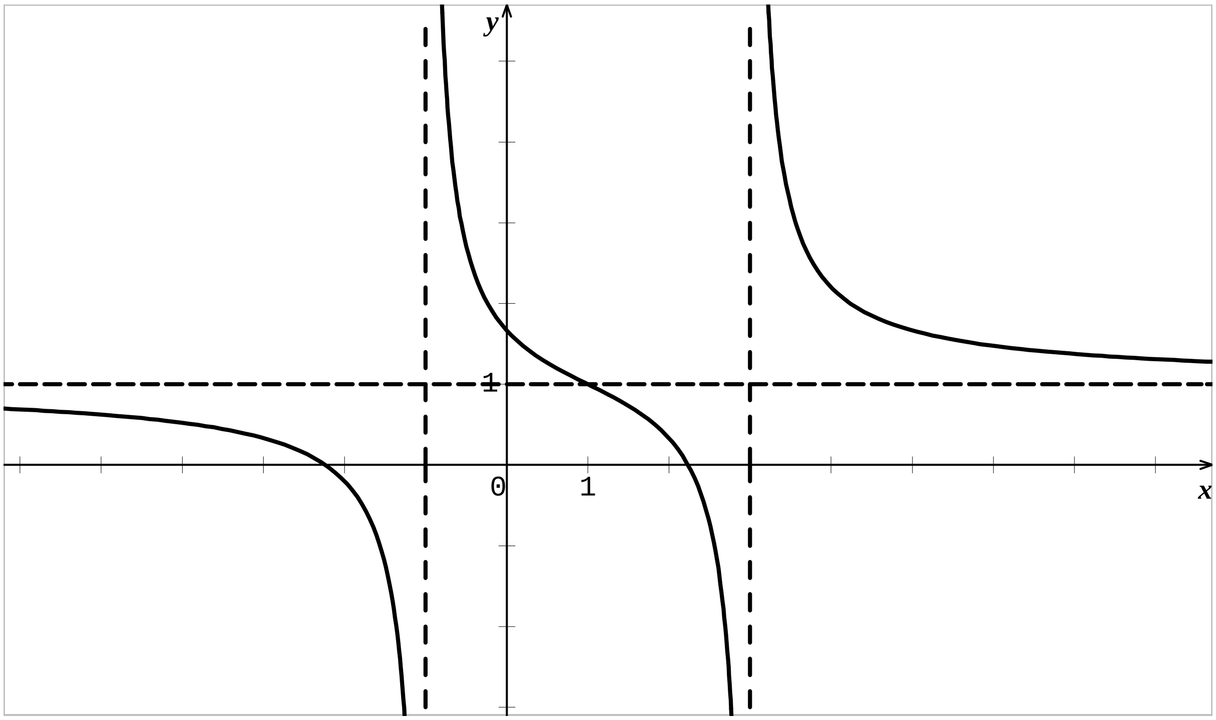


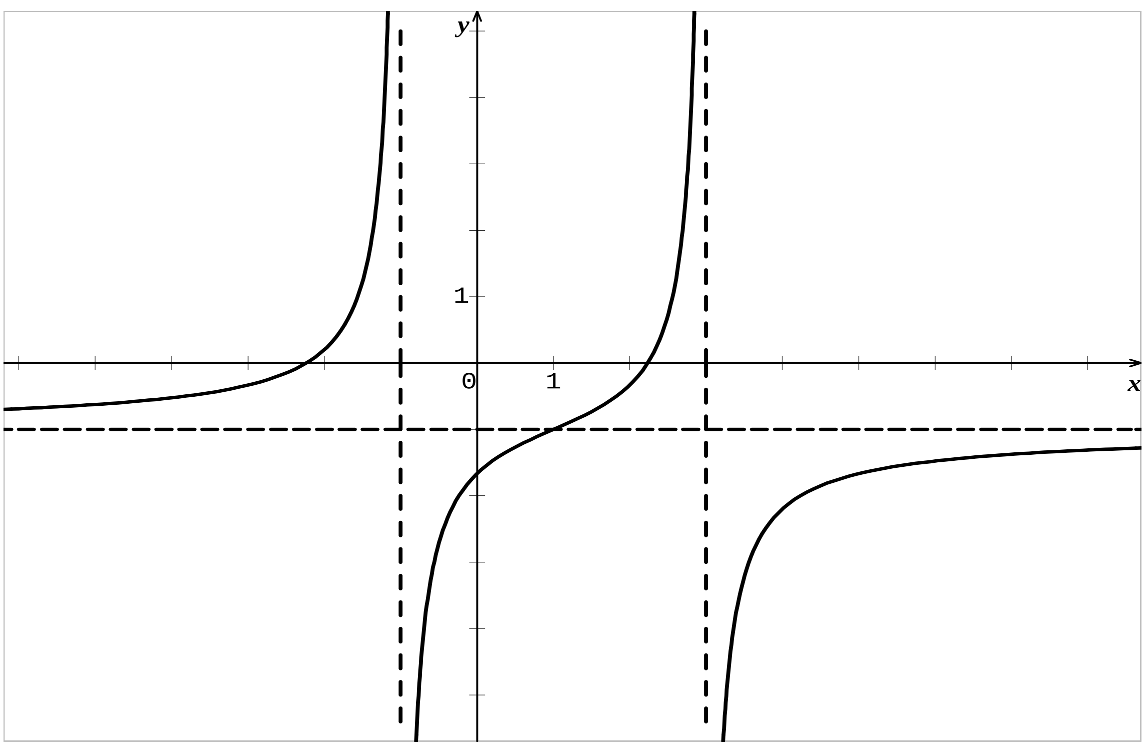


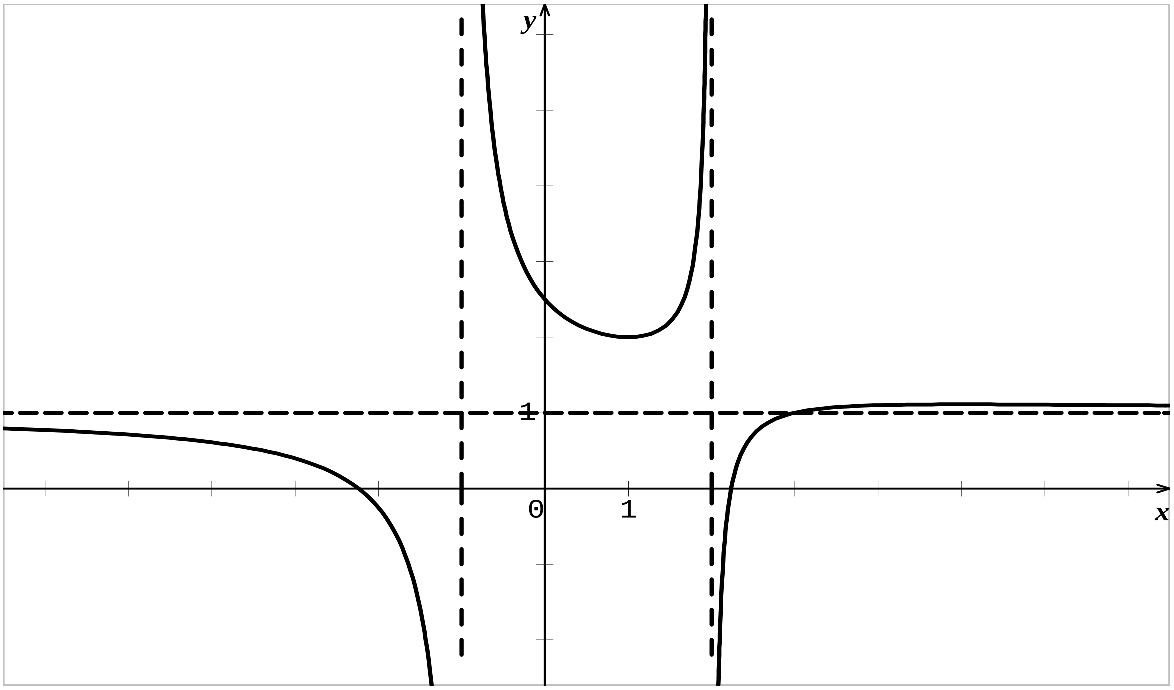

y
1
0
1
x

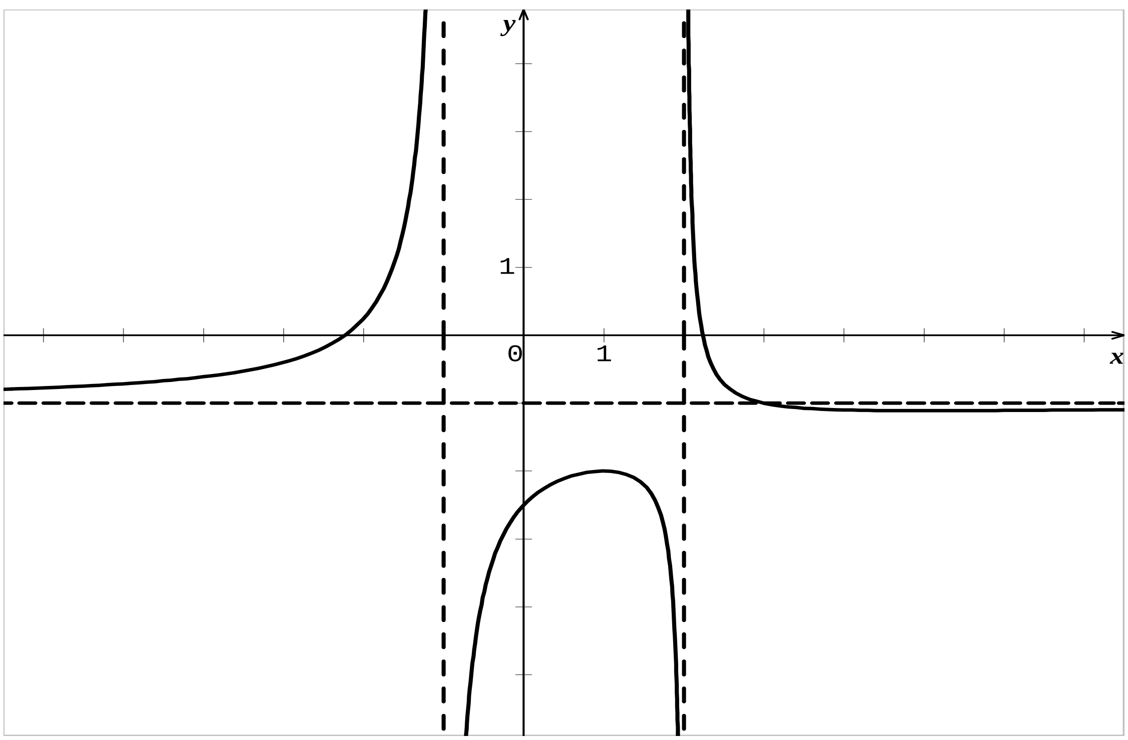

y
1
0
1
x

3/ករណី $\Delta = q^2 - 4pr > 0$






y
1
0
1
x


y
1
0
1
x

ឧទាហរណ៍១ គេឲ្យអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ កំណត់ដោយ $\mathbf{f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-2x+2}}$

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាង $\mathbf{f}$ ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់។

ដំណោះស្រាយ

•ដែនកំណត់

គេមាន $\mathbf{x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0 \quad \forall x\in IR}$

ដូចនេះ $\mathbf{D=IR}$ ។

•សរសេរជារាងកាណូនិក

$$\mathbf{f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x^2-2x+2}=1-\frac{5}{x^2-2x+2}}$$

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $\mathbf{f'(x)=(1-\dfrac{5}{x^2-2x+2})'=\dfrac{5(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}}$

$\mathbf{f'(x)=0}$ គេបាន $\mathbf{\dfrac{5(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}=0}$ នោះ $\mathbf{x=1}$

ចំពោះ $\mathbf{x=1}$ នាំឲ្យ $\mathbf{f(1)=1-5=-4}$ ។

អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀបស្មើនឹង $\mathbf{-4}$ ត្រង់ $\mathbf{x=1}$ ។

-គណនាលីមីត ៖

$$\mathbf{\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}(1-\frac{5}{x^2-2x+2})=1}$$

-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$ នោះបន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	1

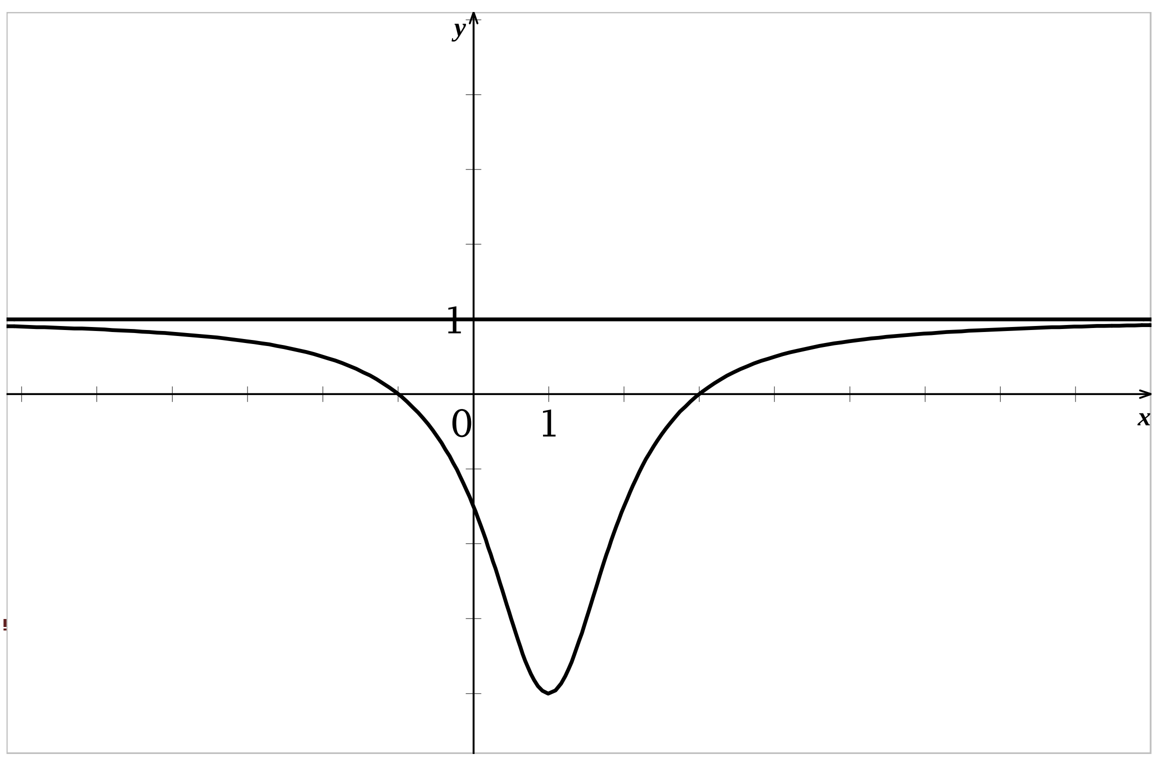
•សំណង់ក្រាប ៖

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអក្ស័អាប់ស៊ីស $y=0$ នោះ

$x^2-2x-3=0$

គេទាញឫស $x_1=-1$, $x_2=3$ ។

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអក្ស័អរដោនេ $x=0$ នោះ $y=-\frac{3}{2}$



ឧទាហរណ៍២ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ

$$f(x)=\frac{x^2+6x}{2(x^2-2x+2)}$$

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាង f ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់។

ដំណោះស្រាយ

•ដែនកំណត់

គេមាន $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0\ \ \forall x\in IR$

ដូចនេះ $D=IR$ ។

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{(2x+6)(x^2-2x+2)-(2x-2)(x^2+6x)}{2(x^2-2x+2)^2}$

$$f'(x)=\frac{-8x^2+4x+12}{2(x^2-2x+2)^2}\quad ។$$

បើ $f'(x)=0$ គេបាន $\dfrac{-8x^2+4x+12}{2(x^2-2x+2)^2}=0$

នោះ $-8x^2+4x+12=0$ នាំឲ្យ $x_1=-1\ ,\ x_2=\dfrac{3}{2}$

ចំពោះ $x=-1$ នាំឲ្យ $f(-1)=\dfrac{-5}{10}=-\dfrac{1}{2}$ ។

ចំពោះ $x=\dfrac{3}{2}$ នាំឲ្យ $f(\dfrac{3}{2})=\dfrac{9}{2}$

អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀបស្មើនឹង $-\frac{1}{2}$ ត្រង់ $x=-1$

និង មានអតិបរមាធៀបស្មើនឹង $\frac{9}{2}$ ត្រង់ $x=\frac{3}{2}$ ។

-គណនាលីមីត ៖

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+6x}{2(x^2-2x+2)}=\frac{1}{2}$$

-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{1}{2}$ នោះបន្ទាត់ $y=\frac{1}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	9	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

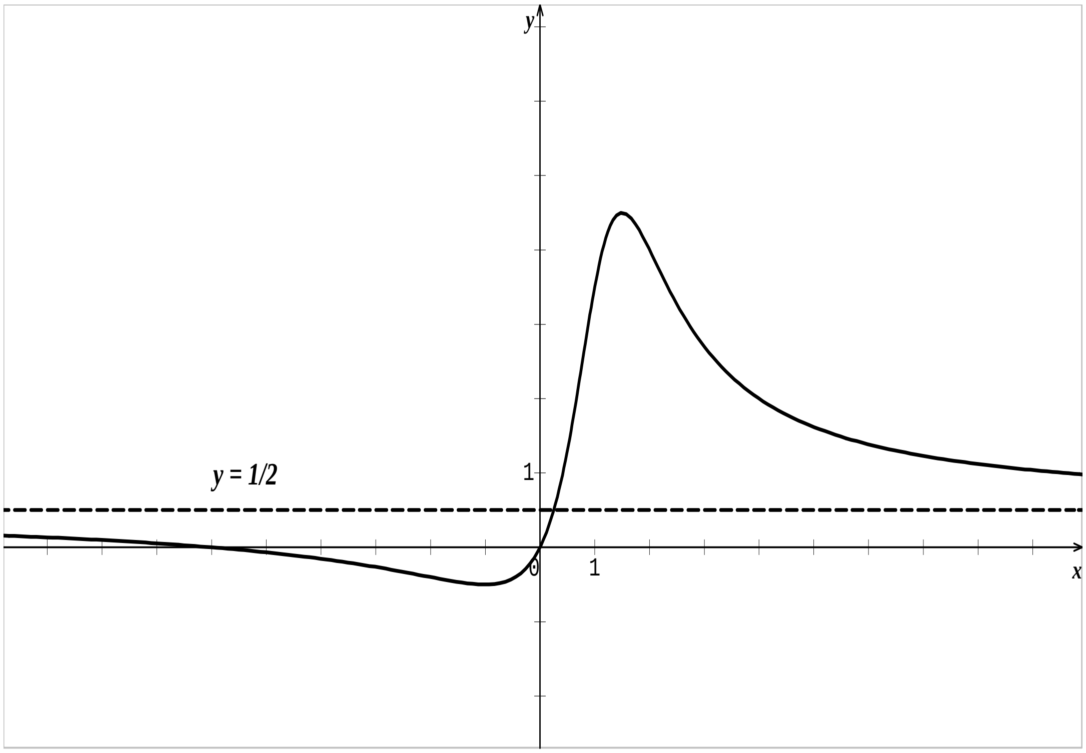
•សំណង់ក្រាប ៖

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអក្សអាប់ស៊ីស $y=0$ នោះ

$$x^2-2x-3=0$$

គេទាញឫស $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ ។

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអក្ស័អរដោនេ $x = 0$ នោះ $y = -\frac{3}{2}$



ឧទាហរណ៍៣ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}$

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាង f ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ដំណោះ

ដំណោះស្រាយ

•ដែនកំណត់

គេមាន $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

ដូចនេះ $D = IR - \{ 1 , 3 \}$ ។

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $\mathbf{f'(x)=\dfrac{(2x+6)(x^2-2x+2)-(2x-2)(x^2+6x)}{2(x^2-2x+2)^2}}$

$$\mathbf{f'(x)=\frac{3x-6}{(x^2-4x+3)^2}=\frac{3(x-2)}{(x^2-4x+3)^2}}$$ ។

បើ $\mathbf{f'(x)=0}$ គេបាន $\mathbf{\dfrac{3(x-2)}{(x^2-4x+3)^2}=0}$ នាំឲ្យ $\mathbf{x=2}$ ។

ចំពោះ $\mathbf{x=2}$ នាំឲ្យ $\mathbf{f(2)=4}$ ។

អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀបស្មើនឹង $\mathbf{4}$ ត្រង់ $\mathbf{x=2}$ ។

-គណនាលីមីត និង អាស៊ីមតូត

$$\mathbf{\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-4x}{(x-1)(x-3)}=-\infty}$$

$$\mathbf{\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-4x}{(x-1)(x-3)}=+\infty}$$

$$\mathbf{\lim_{x\to3^-}f(x)=\lim_{x\to3^-}\frac{x^2-4x}{(x-1)(x-3)}=+\infty}$$

$$\mathbf{\lim_{x\to3^+}f(x)=\lim_{x\to3^+}\frac{x^2-4x}{(x-1)(x-3)}=-\infty}$$

$$\mathbf{\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4x}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=1}$$

ដោយ $\mathbf{\lim_{x\to1}f(x)=\infty}$ និង $\mathbf{\lim_{x\to3}f(x)=\infty}$ នោះបន្ទាត់ $\mathbf{x=1}$ និង $\mathbf{x=3}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

ហើយ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$ នោះបន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប

-តារាងអថេរភាព

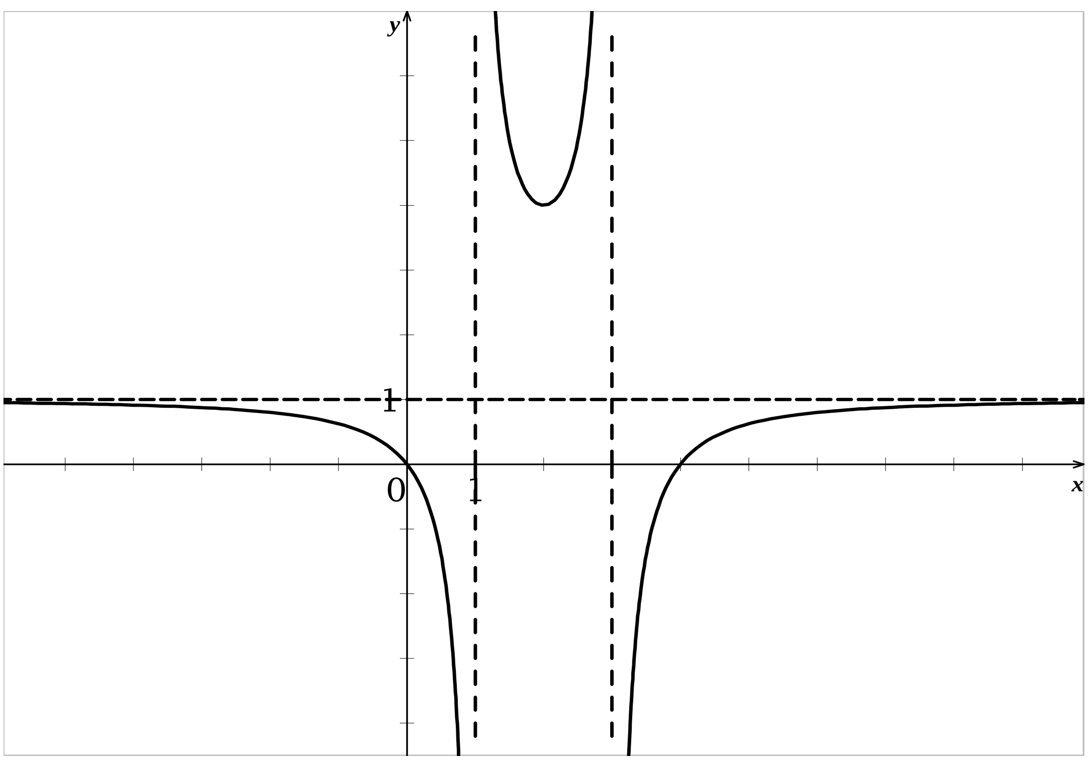
x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1

•សំណង់ក្រាប ៖

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអក្ស័អាប់ស៊ីស $y=0$ នោះ

$x^2-4x=0$ គេទាញឫស $x_1=0$, $x_2=4$ ។

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអក្ស័អរដោនេ $x=0$ នោះ $y=0$



ឧទាហរណ៍៨ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{2x^2+6x-4}{x^2+2x-3}$

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាង f ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់

ដំណោះស្រាយ

•ដែនកំណត់

គេមាន $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$

ដូចនេះ $D=IR-\{\,-3\,,\,1\,\}$ ។

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{(4x+6)(x^2+2x-3)-(2x+2)(2x^2+6x-4)}{(x^2+2x-3)^2}$

$$f'(x)=\frac{-2x^2-4x-10}{(x^2+2x-3)^2}=-\frac{2[(x+1)^2+4]}{(x^2+2x-3)^2}$$ ។

ដោយ $(x+1)^2+4>0$ នោះ $f'(x)<0\ \forall x\in D$

នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះលើដែនកំណត់ ។

-គណនាលីមីត ៖

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{2x^2+6x-4}{(x-1)(x+3)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{2x^2+6x-4}{(x-1)(x+3)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-3^-}f(x)=\lim_{x\to3^-}\frac{2x^2+6x-4}{(x-1)(x+3)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{2x^2+6x-4}{(x-1)(x+3)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{2x^2+6x-4}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$ និង $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \infty$ នោះបន្ទាត់ $x = 1$ និង $x = -3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

ហើយ $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 2$ នោះបន្ទាត់ $y = 2$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

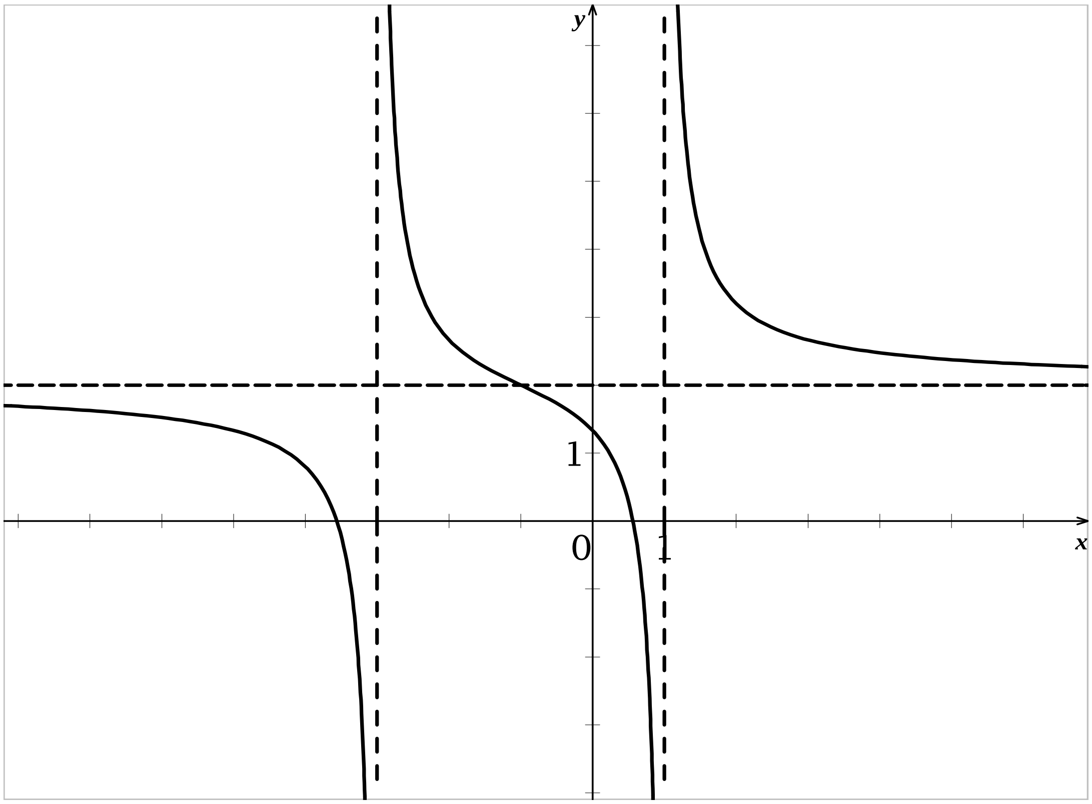
•សំណង់ក្រាប ៖

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអក្សអាប់ស៊ី $y = 0$ នោះ

$$2x^2 + 6x - 4 = 0$$

គេទាញឫស $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$ ។

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអក្សអរដោនេ $x = 0$ នោះ $y = \dfrac{4}{3}$



ឧទាហរណ៍៨ គេឲ្យអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ កំណត់ដោយ $\mathbf{f(x)=\dfrac{2x^2-x-7}{x^2-x-2}}$

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាង $\mathbf{f}$ ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់។

ដំណោះស្រាយ

•ដែនកំណត់

គេមាន $\mathbf{x^2-x-2=(x+1)(x-2)}$

ដូចនេះ $\mathbf{D=IR-\{\,-1\;,\;2\,\}}$ ។

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $\mathbf{f\,'(x)=\dfrac{(4x-1)(x^2-x-2)-(2x-1)(2x^2-x-7)}{(x^2+2x-3)^2}}$

$$f'(x)=\frac{-x^2+6x-5}{(x^2-x-2)^2}$$ ។

បើ $f'(x)=0$ គេបាន $\frac{-x^2+6x-5}{(x^2-x-2)^2}=0$

នោះ $-x^2+6x-5=0$ នាំឲ្យ $x_1=1$, $x_2=5$

ចំពោះ $x=1$ នាំឲ្យ $f(1)=3$ ហើយ $x=3$ នាំឲ្យ $f(3)=\frac{2}{3}$

អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀបស្មើនឹង 3 ត្រង់ $x=1$

និង មានអតិបរមាធៀបស្មើនឹង $\frac{2}{3}$ ត្រង់ $x=3$ ។

-គណនាលីមីត ៖

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{2x^2-x-7}{(x+1)(x-2)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{2x^2-x-7}{(x+1)(x-2)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{2x^2-x-7}{(x+1)(x-2)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{2x^2-x-7}{(x+1)(x-2)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\pm}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x-7}{(x+1)(x-2)}=2$$

-អាស៊ីមតូត

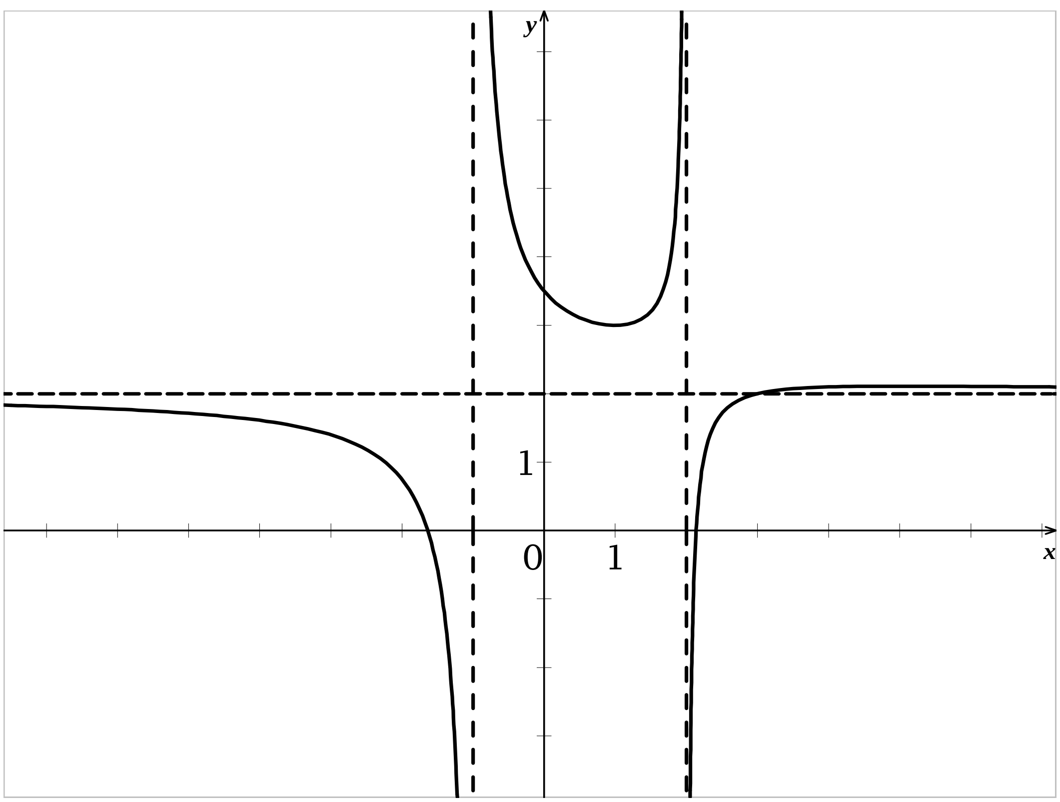
ដោយ $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\infty$ និង $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=-1$ និង $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

ហើយ $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=2$ នោះបន្ទាត់ $y=2$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$		$+$	‖	$+$		$-$	
$f(x)$	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{2}{3}$	↘	2

•សំណង់ក្រាប ៖



ឧទាហរណ៍៦ គេឲ្យអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ កំណត់ដោយ

$$f(x)=\frac{x^2+2x-7}{x^2-2x+1}$$

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាង$\mathbf{f}$ ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់។

ដំណោះស្រាយ

•ដែនកំណត់

គេមាន $x^2-2x+1=(x-1)^2$

ដូចនេះ $D=IR-\{\ 1\ \ \}$ ។

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{(2x+2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2+2x-7)}{(x-1)^4}$

$$f'(x)=\frac{-4x+12}{(x-1)^3} \quad ។$$

បើ $f'(x)=0$ គេបាន $\dfrac{-4x+12}{(x-1)^3}=0$ នោះ $x=3$ ។

ចំពោះ $x=3$ នាំឲ្យ $f(3)=2$ ។

អនុគមន៍មានអតិបរមាធៀបស្មើនឹង 2 ត្រង់ $x=3$ ។

-គណនាលីមីត ៖

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+2x-7}{(x-1)^2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+2x-7}{(x-1)^2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x-7}{(x-1)^2}=1$$

-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim\limits_{x\to1} f(x)=-\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។ ហើយ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$ នោះបន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	2	↘	1

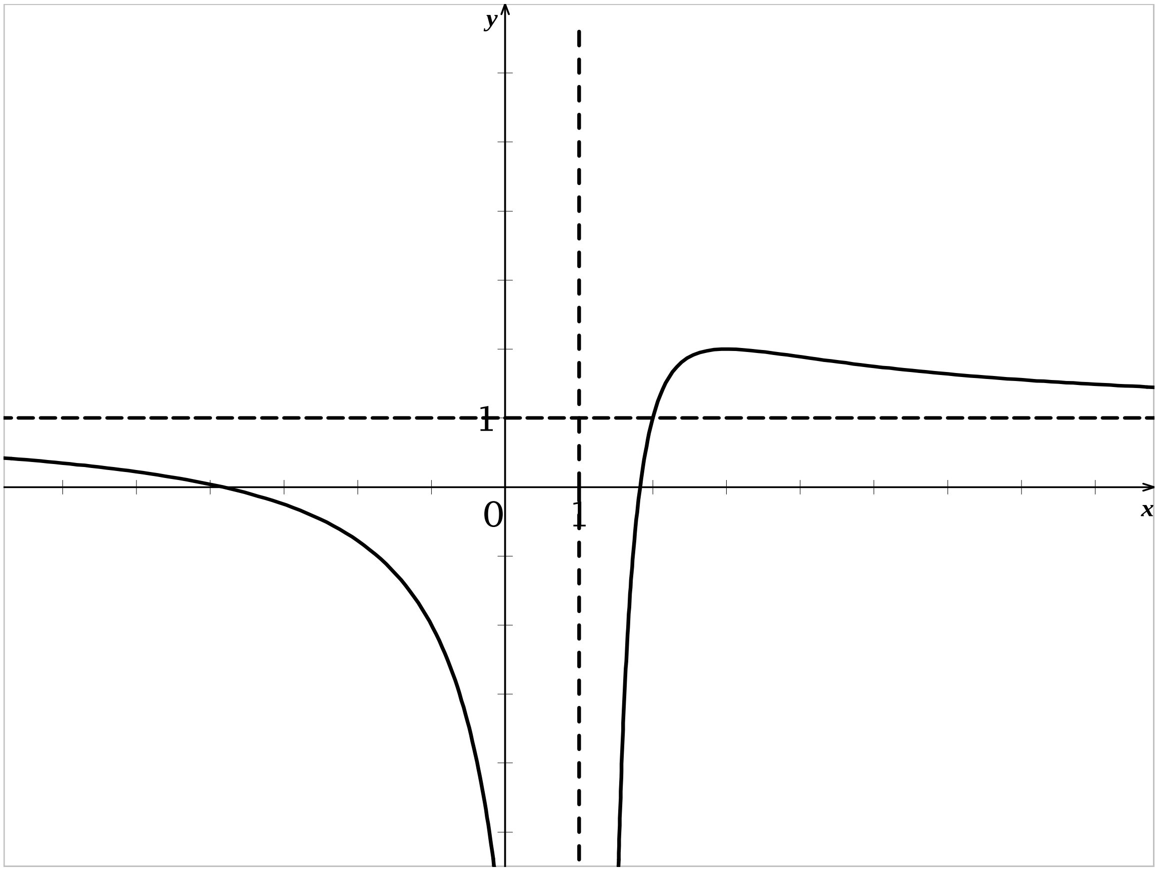
•សំណង់ក្រាប ៖

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអក្សអាប់ស៊ី $y=0$ នោះ

$$x^2+2x-7=0$$

គេទាញឫស $x_1=-1-2\sqrt{2}$, $x_2=-1+2\sqrt{2}$ ។

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអក្សអរដោនេ $x=0$ នោះ $y=-7$ ។



ᢱᢱᢱΩᢰᢰᢰ

៧-សិក្សាអនុគមន៍រាង $y = \sqrt{ax+b}$

☞ ដែនកំណត់ ៖ $\mathbf{D = \{x / ax + b \geq 0\}}$

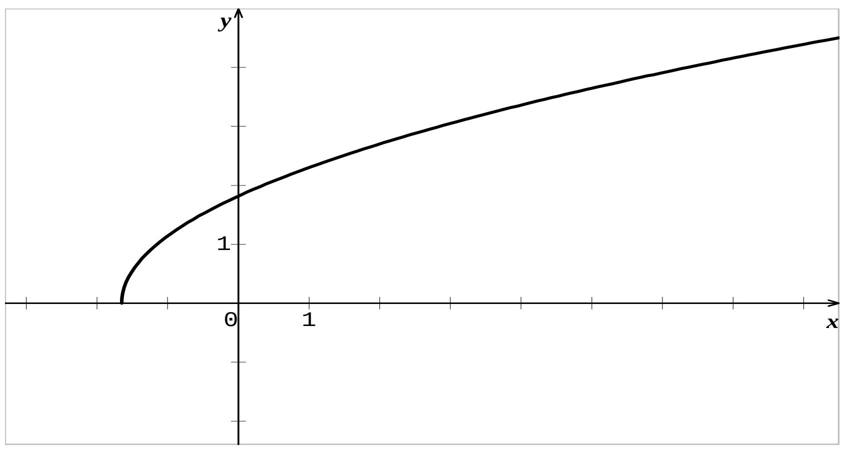
☞ ដេរីវេ $\mathbf{f'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}}$

-បើ $\mathbf{a > 0}$ នោះ $\mathbf{f'(x) > 0}$ នោះ $\mathbf{f}$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត។

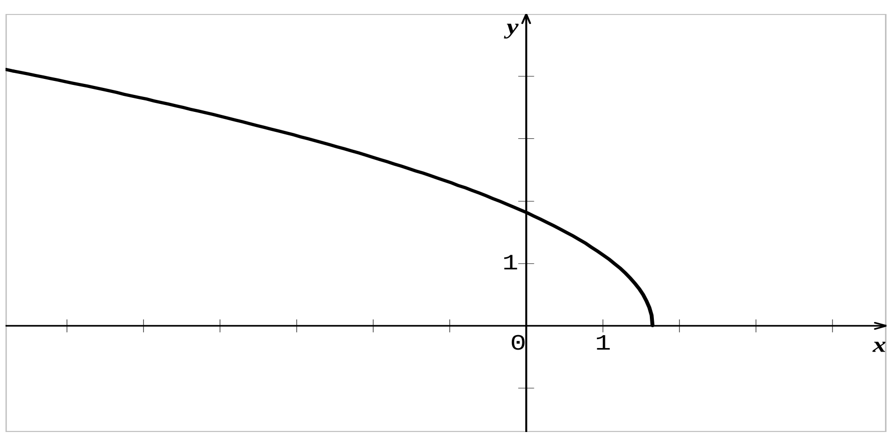
-បើ $\mathbf{a < 0}$ នោះ $\mathbf{f'(x) < 0}$ នោះ $\mathbf{f}$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាត។

☞ ក្រាបមានរូបដូចខាងក្រោម ៖

$\mathbf{a > 0}$



$\mathbf{a < 0}$



ឧទាហរណ៍១ គេឲ្យអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ កំណត់ដោយ $\mathbf{f(x)=\sqrt{2x+6}}$
សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាង$\mathbf{f}$ ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់

•ដែនកំណត់ $\mathbf{D=[-3\ ,+\infty)}$ ។

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $\mathbf{f'(x)=\dfrac{(2x+6)'}{2\sqrt{2x+6}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x+6}}>0\ \forall x\in D}$

គេបាន $\mathbf{f}$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើដែនកំណត់របស់វា ។

-រកលីមីត $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x+6}=+\infty}$

-តារាងអថេរភាព

x	-3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

•សំណង់ក្រាប

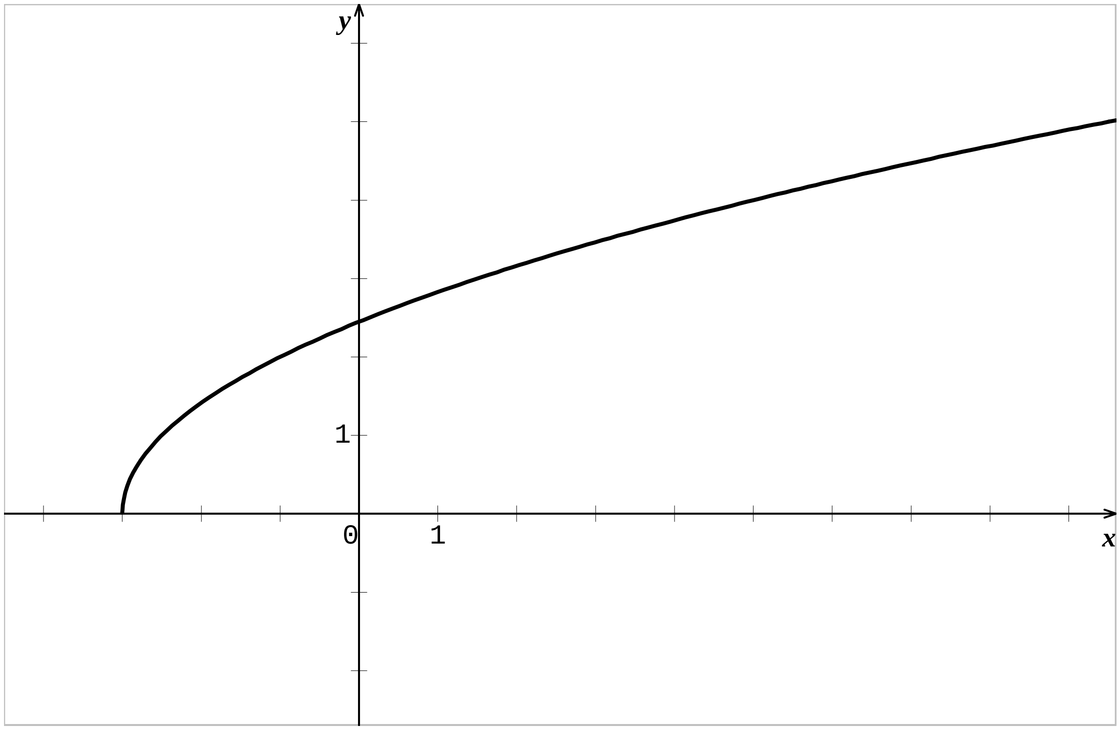
-កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអក្ស័ $\mathbf{(ox)}$ គឺ $\mathbf{y=0}$

គេបាន $\mathbf{\sqrt{2x+6}=0}$ នោះ $\mathbf{x=-3}$ ។

-កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអក្ស័ $\mathbf{(oy)}$ គឺ $\mathbf{x=0}$

គេបាន $\mathbf{y=\sqrt{6}}$ ។

ដូចនេះក្រាបកាត់អក្ស័កូអរដោនេ $\mathbf{(-3,0)}$ និង $\mathbf{(0,\sqrt{6})}$ ។



ឧទាហរណ៍២ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\sqrt{-2x+4}$

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាង f ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់

•ដែនកំណត់ $D=(-\infty\ ,\ 2]$ ។

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{(-2x+4)'}{2\sqrt{-2x+4}}=-\dfrac{1}{\sqrt{-2x+4}}<0\ \forall x\in D$

គេបាន f ជាអនុគមន៍ចុះជានិច្ចលើដែនកំណត់របស់វា ។

-រកលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-2x+4}=+\infty$

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		2
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

•សំណង់ក្រាប

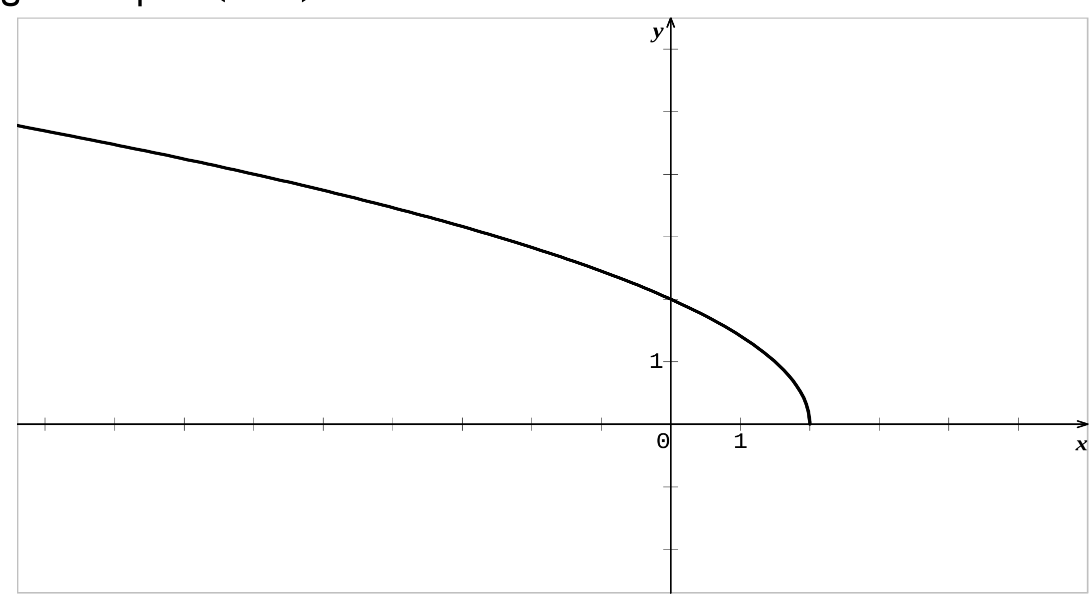
-កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអក្ស័ (ox) គឺ $y=0$

គេបាន $\sqrt{-2x+4}=0$ នោះ $x=2$ ។

-កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអក្ស័ (oy) គឺ $x=0$

គេបាន $y=2$ ។

ដូចនេះក្រាបកាត់អក្ស័អាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច $(2,0)$ អក្ស័អរដោនេត្រង់ចំណុច $(0,2)$ ។



៨-សិក្សាអនុគមន៍រាង $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$

ដែល $a \neq 0$ និង $\Delta = b^2 - 4ac$ ។

របៀបដោះស្រាយ

☞ ដែនកំណត់ ៖ $D = \{x / ax^2 + bx + c \geq 0\}$

☞ ដេរីវេ $f'(x) = \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$

☞ អាស៊ីមតូត ៖

-បើ $a < 0$ នោះក្រាបគ្មានអាស៊ីមតូតទេ

-បើ $a > 0$ នោះក្រាបមានអាស៊ីមតូតពីរ ។

$$f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,|x + \frac{b}{2a}| + \varepsilon(x)$$

ដែល $\lim\limits_{x \to \infty} \varepsilon(x) = 0$

កាលណា $x \to -\infty$ នោះក្រាបមានអាស៊ីមតូតទ្រេត

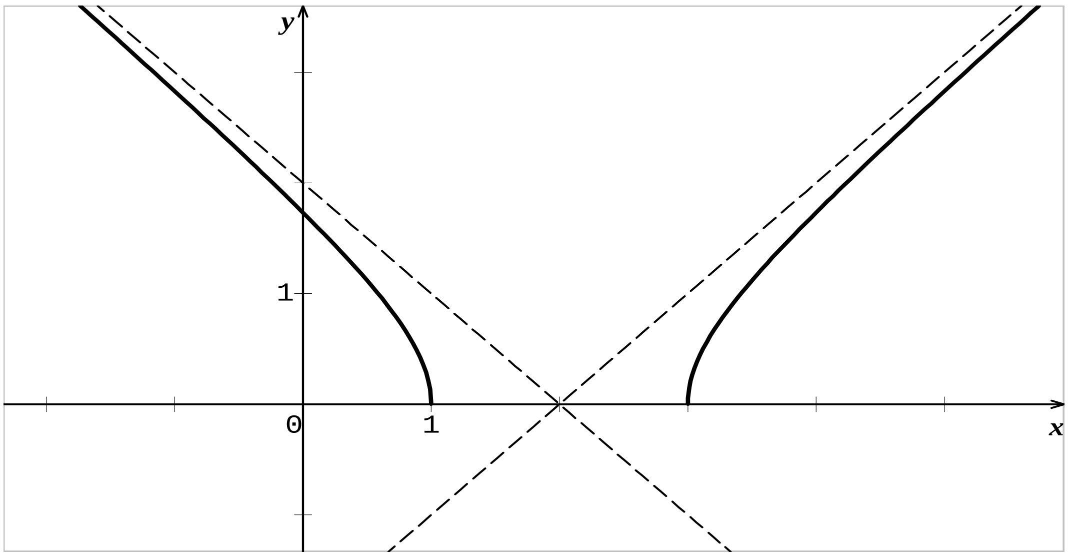
$$y = \sqrt{a}(x + \frac{b}{2a})$$

កាលណា $x \to -\infty$ នោះក្រាបមានអាស៊ីមតូតទ្រេត

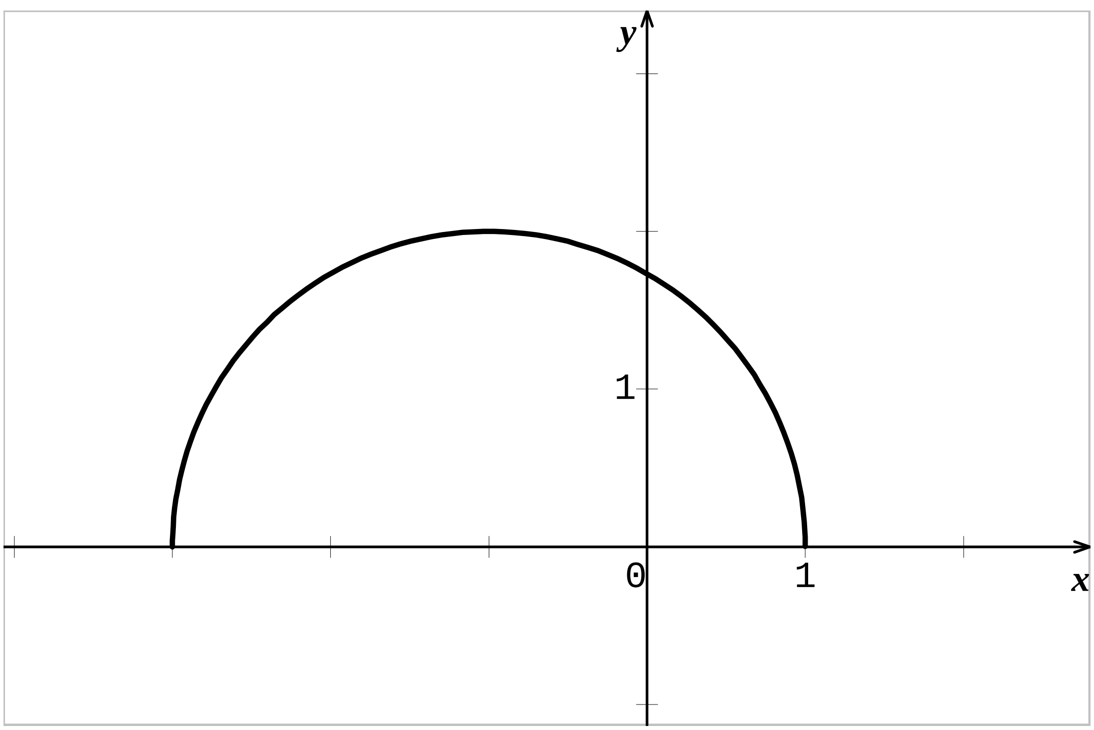
$$y = -\sqrt{a}(x + \frac{b}{2a})$$

☞ ក្រាបមានរូបដូចខាងក្រោម ៖

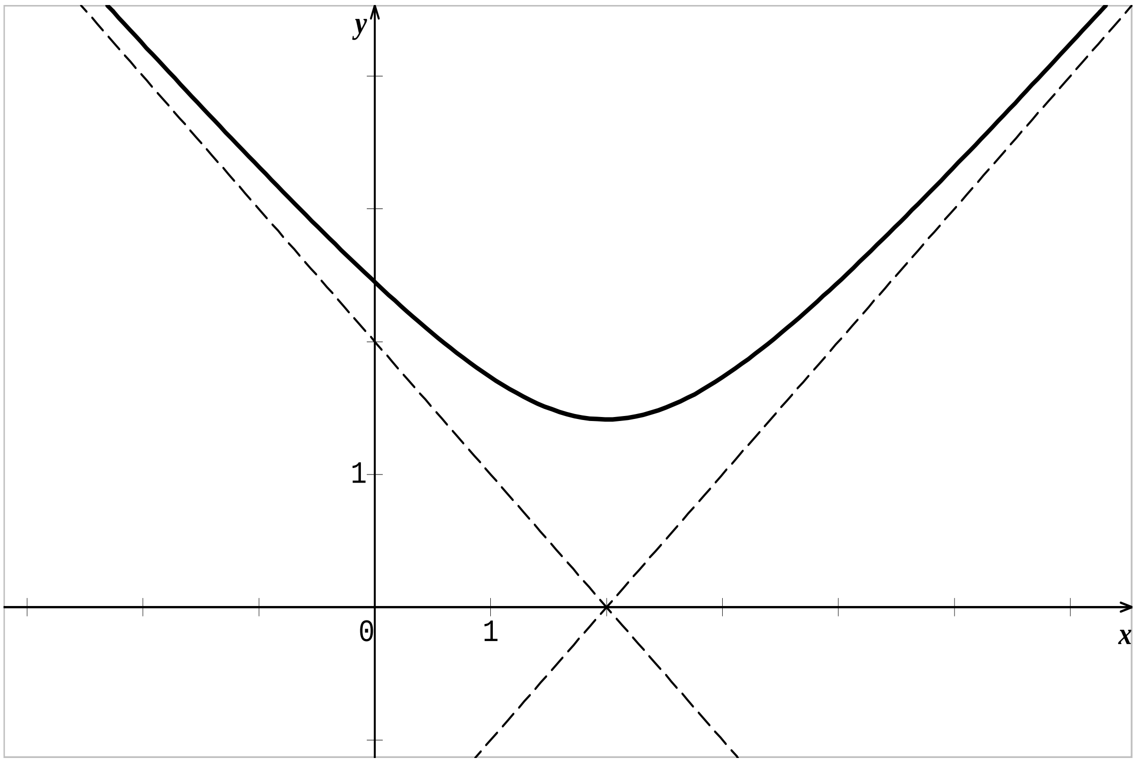
-ករណីទី១ $\mathbf{a > 0 \ , \ \Delta > 0}$



-ករណីទី២ $\mathbf{a < 0 \ , \ \Delta > 0}$



-ករណីទី៣ $a > 0\ ,\ \Delta < 0$



ឧទាហរណ៍១ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ

$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 13}$

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាងf ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់

•ដែនកំណត់ $D = IR$ ។

-ដេរីវេ $f'(x) = \dfrac{(x^2 - 4x + 13)'}{2\sqrt{x^2 - 4x + 13}} = \dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}}$

$f'(x) = 0$ នាំឲ្យ $x = 2$ ។

ចំពោះ $x=2$ នាំឲ្យ $f(2)=\sqrt{4-8+13}=3$ ។

អនុគមន៍ f មានអប្បបរមាស្មើ 3 ត្រង់ $x=2$ ។

-រកលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-4x+13}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-4x+13}=+\infty$$

-សមីការអាស៊ីមតូត

គេមាន

$$f(x)=\sqrt{x^2-4x+13}=\sqrt{(x-2)^2+9}=|x-2|+\varepsilon(x)$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}\varepsilon(x)=0$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0$ នោះបន្ទាត់

$y=-(x-2)$

និង $y=x-2$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប ។

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

•សំណង់ក្រាប

-កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអក្ស័ (ox) គឺ $y=0$

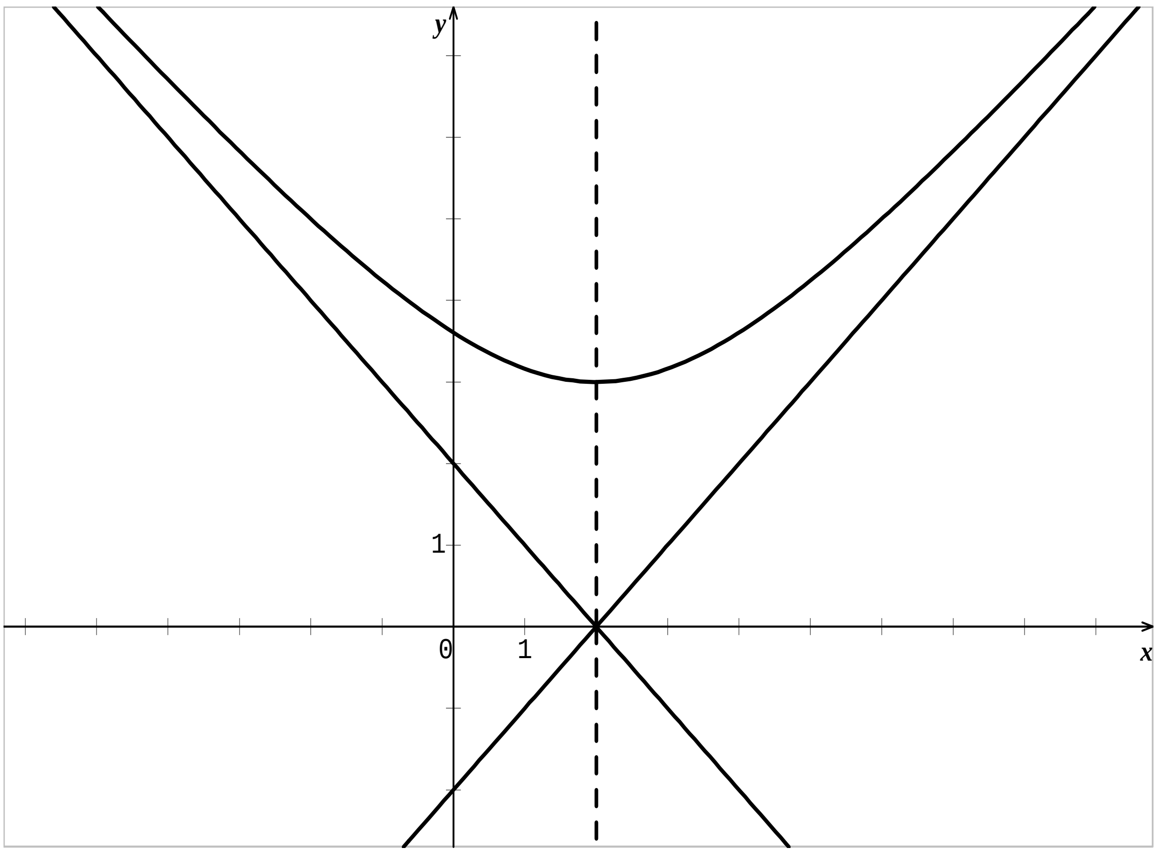
គេបាន $\sqrt{x^2-4x+13}=0$ នោះ $x^2-4x+13=0$

$\Delta' = 4 - 13 = -9 < 0$ នោះសមីការគ្មានឫស ។

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអក្ស័ (oy) គឺ $x = 0$ នោះ $y = \sqrt{13}$

-អក្ស័ឆ្លុះ បន្ទាត់ $x = 2$ ព្រោះ $f(2a - x) = f(x)$

$f(4 - x) = \sqrt{(4 - x)^2 - 4(4 - x) + 13} = \sqrt{x^2 - 4x + 13} = f(x)$



ឧទាហរណ៍២ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ

$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាងf ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់។

•ដែនកំណត់ $D=(-\infty,1]\cup[5,+\infty)$ ។

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{(x^2-6x+5)'}{2\sqrt{x^2-6x+5}}=\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}$

គ្រប់ $x\in(-\infty,1]$ គេបាន $f'(x)\le 0$ និ $x\in(5,+\infty]$ គេបាន $f'(x)>0$

ដូចនេះអនុគមន៍ f ចុះលើចន្លោះ $x\in(-\infty,1]$ និងកើនលើ $x\in(5,+\infty]$

-រកលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-6x+5}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-6x+5}=+\infty$$

-សមីការអាស៊ីមតូត

គេមាន $f(x)=\sqrt{x^2-6x+5}=\sqrt{(x-3)^2-4}=|x-3|+\varepsilon(x)$

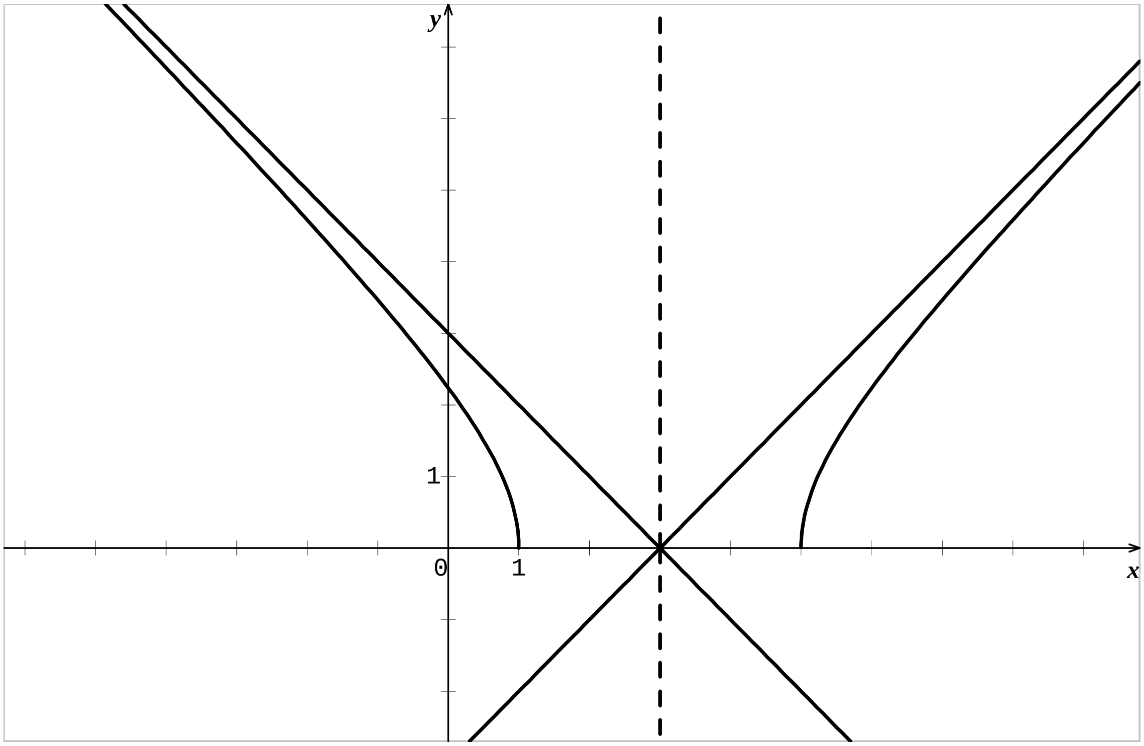
ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}\varepsilon(x)=0$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0$ នោះបន្ទាត់ $y=-(x-3)$

និង $y=x-3$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប ។

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$--$	0		0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$

•សំណង់ក្រាប



ឧទាហរណ៍៣ គេឲ្យអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ កំណត់ដោយ

$$\mathbf{f(x)=\sqrt{-x^2-2x+8}}$$

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាង$\mathbf{f}$ ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់។

•ដែនកំណត់ $\mathbf{D=[-4\ ,\ 2]}$ ។

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $\mathbf{f'(x)=\dfrac{(-x^2-2x+8)'}{2\sqrt{-x^2-2x+8}}=\dfrac{-x-1}{\sqrt{-x^2-2x+8}}}$

$\mathbf{f'(x)=0}$ គេបាន $\mathbf{\dfrac{-x-1}{\sqrt{-x^2-2x+8}}=0}$ នាំឲ្យ $\mathbf{x=-1}$ ។

អនុគមន៍មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=-1$ គឺ $f(-1)=3$

-តារាងអថេរភាព

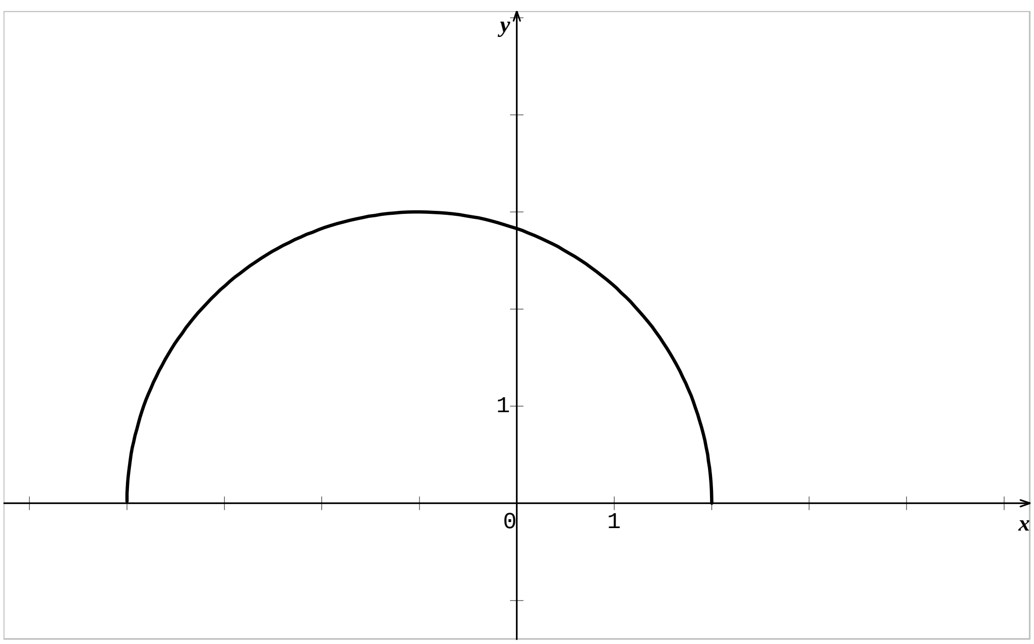
x	-4		-1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

•សំណង់ក្រាប

គេមាន $y=\sqrt{-x^2-2x+8}=\sqrt{9-(x+1)^2}$

សមមូល $\begin{cases}(x+1)^2+y^2=9\\ y\ge 0\end{cases}$

ដូចនេះក្រាបគឺជាកន្លះរង្វង់ដែលមានផ្ចិត $I(-1,0)$ និងកាំ $R=3$



ជំពូកទី៤

លំហាត់មានដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី០១

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{(m+1)x+2(2m-1)}{x+m}$

សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃ f ទៅតាមតម្លៃនៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ។

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃ f

$$f(x)=\frac{(m+1)x+2(2m-1)}{x+m}$$

ដែនកំណត់ $D=\Re-\{-m\}$

ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{(m+1)(x+m)-\left[(m+1)x+2(2m-1)\right]}{\left(x+m\right)^2}$

$$=\frac{(m+1)x+m^2+m-(m+1)x-4m+2}{\left(x+m\right)^2}$$

$$=\frac{m^2-3m+2}{(x+m)^2}$$

ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ គេមាន $(x+m)^2>0$

នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $D=m^2-3m+2$ ។

បើ $D=0$ នោះ $m^2-3m+2=0$ នាំឲ្យ $m_1=1$, $m_2=2$

តារាងសិក្សាសញ្ញានៃ $D = m^2 - 3m + 2$

m	$-\infty$		1		2		$+\infty$
D		$+$	0	$-$	0	$+$	

តាមតារាងខាងលើយើងអាចសន្និដ្ឋានដូចតទៅ ៖

-ចំពោះ $m \in (-\infty , 1) \cup (2 , +\infty)$: $f'(x) > 0$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើនលើដែនកំណត់ D_f ។

-ចំពោះ $m \in \left(1 , 2\right)$: $f'(x) < 0$ នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះលើដែនកំណត់ D_f ។

-ចំពោះ $m = 1$ ឬ $m = 2$ នោះ $f'(x) = 0$ នាំឲ្យ f ជាអនុគមន៍ថេរគឺ $f(x) = \dfrac{2x+2}{x+1} = 2$ និង $f(x) = \dfrac{3x+6}{x+2} = 3$ ។

លំហាត់ទី០២

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{mx+2m^2-3m-3}{x+m-1}$

សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃ f ទៅតាមតម្លៃនៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ។

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃ f

$$f(x)=\frac{mx+2m^2-3m-3}{x+m-1}$$

ដែនកំណត់ $D=\Re-\{\,1-m\,\}$

ដេរីវេ $f\,'(x)=\dfrac{m(x+m-1)-(mx+2m^2-3m-3)}{\left(x+m-1\right)^2}$

$$=\frac{mx+m^2-m-mx-2m^2+3m+3}{(x+m-1)^2}$$

$$=\frac{-m^2+2m+3}{(x+m-1)^2}$$

ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ គេមាន $(x+m-1)^2>0$

នោះ $f\,'(x)$ មានសញ្ញាដូច $D=-m^2+2m+3$ ។

បើ $D=0$ នោះ $-m^2+2m+3=0$ នាំឲ្យ $m_1=-1$, $m_2=3$

តារាងសិក្សាសញ្ញានៃ $D=-m^2+2m+3$

m	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
D		$-$	0	$+$	0	$-$	

តាមតារាងខាងលើយើងអាចសន្និដ្ឋានដូចតទៅ ៖

-ចំពោះ $m \in (-\infty\ ,\ -1) \cup (3\ ,\ +\infty\ )\ :\ f\ '(x) < 0$ នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះលើដែនកំណត់ D_f ។

-ចំពោះ $m \in \left(-1\ ,\ 3\right)\ :\ f\ '(x) > 0$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើនលើដែនកំណត់ D_f ។

-ចំពោះ $m = -1$ ឬ $m = 3$ នោះ $f\ '(x) = 0$ នាំឲ្យ f ជាអនុគមន៍ថេរគឺ ៖

ចំពោះ $m = -1$ នោះ $f(x) = \dfrac{-x+2}{x-2} = -1$ គ្រប់ $x \neq 2$ ។

ចំពោះ $m = 3$ នោះ $f(x) = \dfrac{3x+6}{x+2} = 3$ គ្រប់ $x \neq -2$ ។

លំហាត់ទី០៣

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-(m+1)x^2+(5m-1)x+2m-3$$

កំណត់ m ដើម្បីឲ្យ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ m ដើម្បីឲ្យ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-(m+1)x^2+(5m-1)x+2m-3$

ដែនកំណត់ $D_f=\mathbb{R}$

ដេរីវេ $f'(x)=x^2-2(m+1)x+5m-1$

ដើម្បីឲ្យ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$ លុះត្រាតែ ៖

$\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)>0$ សមមូល $\begin{cases} a=1>0 \\ \Delta'=(m+1)^2-(5m-1)<0 \end{cases}$

សមមូល $\Delta'=m^2-3m+2<0$ មានឫស $m_1=1$, $m_2=2$

m	$-\infty$		1		2		$+\infty$
Δ'		$+$	0	$-$	0	$+$	

ដូចនេះ $m\in(1\,,\,2)$ ។

លំហាត់ទី០៤

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$

ក)ចូរគណនា $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា ។

ខ)ចូរប្រៀបធៀបចំនួន ៖

$$A=\frac{6.283184}{1+(3.141592)^2} \quad \text{និង} \quad B=\frac{6.283186}{1+(3.141593)^2}$$

ដំណោះស្រាយ

ក) គណនា $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា

គេមាន $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$ ។

ដោយគ្រប់ $x\in D$ គេមាន $(1+x^2)^2>0$ នោះ $f'(x)$ មាន សញ្ញាដូចភាគយក $2(1-x)(1+x)$ មានឫស $x_1=-1$, $x_2=1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

តាមតារាងខាងលើយើងបាន $f'(x) > 0$ ចំពោះ $x \in (-1,1)$

និង $f'(x) < 0$ ចំពោះ $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ។

ខ) ប្រៀបធៀបចំនួន ៖

$$A = \frac{6.283184}{1+(3.141592)^2} \quad \text{និង} \quad B = \frac{6.283186}{1+(3.141593)^2}$$

យក $\alpha = 3.141592$ និង $\beta = 3.141593$

គេបាន $A = f(\alpha)$ និង $B = f(\beta)$ ។

គេមាន $f'(x) < 0$ ចំពោះ $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ នោះ f

ជាអនុគមន៍ចុះ (តាមសម្រាយខាងលើ) ។

តាមលក្ខណះអនុគមន៍ចុះចំពោះគ្រប់ α, β នៃចន្លោះ $(1, +\infty)$

គេបាន $\alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) > f(\beta)$ ។

ដូចនេះ $A > B$ ។

លំហាត់ទី០៥

ចំពោះគ្រប់ $0<x<a$ និង $m,n\in IN$ ចូរស្រាយថា ៖

$x^m(a-x)^n\le\dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.a^{m+n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $x^m(a-x)^n\le\dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.a^{m+n}$

តាង $f(x)=x^m(a-x)^n$ ដែល $0<x<a$ និង $m,n\in IN$

គេបាន $f'(x)=mx^{m-1}(a-x)^n-n(a-x)^{n-1}x^m$

$$=x^{m-1}(a-x)^{n-1}\left[m(a-x)-nx\right]$$

$$=x^{m-1}(a-x)^{n-1}\left[ma-(m+n)x\right]$$

ដោយ $x^{m-1}(a-x)^{n-1}>0$ ចំពោះ $0<x<a$ នោះ $f'(x)$

មានសញ្ញាដូច $ma-(m+n)x$ មានឫស $x=\dfrac{ma}{m+n}$ ។

ចំពោះ $x=\dfrac{ma}{m+n}$ គេបាន $f\left(\dfrac{ma}{m+n}\right)=\dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.\,a^{m+n}$

ដោយត្រង់ $x=\dfrac{ma}{m+n}$ អនុគមន៍ f' ប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ$(-)$

នោះ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=\dfrac{ma}{m+n}$ ។

ដូចនេះ $f(x)\le f\left(\dfrac{ma}{m+n}\right)=\dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.a^{m+n}$ ។

លំហាត់ទី០៦

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2}{2014}+1$ ដែល $x\in\mathbb{R}$

ចូរប្រៀបធៀប $f(\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b})$ និង $f(\dfrac{a+b}{1+a+b})$

គ្រប់ $a,b>0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ប្រៀបធៀប $f(\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b})$ និង $f(\dfrac{a+b}{1+a+b})$

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2}{2014}+1$ ដែល $x\in\mathbb{R}$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{x}{1007}$ មានឫស $x=0$

បើ $x\in(-\infty\,,\,0)$ គេបាន $f'(x)<0$ នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះ ។

បើ $x\in(0,+\infty)$ គេបាន $f'(x)>0$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើន ។

ម្យ៉ាងទៀតគ្រប់ $a,b>0$ គេមាន $\dfrac{a}{1+a}>\dfrac{a}{1+a+b}$

និង $\dfrac{b}{1+b}>\dfrac{b}{1+a+b}$ នោះ $\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}>\dfrac{a+b}{1+a+b}$

ដោយ $\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}$ និង $\dfrac{a+b}{1+a+b}$ ស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $(0,+\infty)$

ចំពោះ $\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}>\dfrac{a+b}{1+a+b}$ គេបាន ៖

$f(\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b})>f(\dfrac{a+b}{1+a+b})$ ។

លំហាត់ទី០៧

ចំពោះគ្រប់ $x>1$ ចូរស្រាយថា $\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$

តាង $f(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$ ដែល $x>1$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2(x+1)-2(x-1)}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$

គ្រប់ $x>1$គេបាន $f'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $(1,+\infty)$ ។

តាមលក្ខណៈអនុគមន៍កើនចំពោះ $x>1\Rightarrow f(x)>f(1)=0$

គេបាន $\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}>0$ នោះ $\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$ ។

ដូចនេះ $\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$ ។

លំហាត់ទី០៨

ចូរប្រៀបធៀបចំនួន $A=\dfrac{\sin^4\frac{\pi}{11}}{1+\cos^2\frac{2\pi}{11}}$ និង $B=\dfrac{\sin^4\frac{\pi}{13}}{1+\cos^2\frac{2\pi}{13}}$

ដំណោះស្រាយ

ជ្រើសរើស f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{(1-x)^2}{1+x^2}$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

គេមាន $f(\cos\frac{2\pi}{11})=\dfrac{(1-\cos\frac{2\pi}{11})^2}{1+\cos^2\frac{2\pi}{11}}=\dfrac{4\sin^4\frac{\pi}{11}}{1+\cos^2\frac{2\pi}{11}}=4A$

ហើយ $f(\cos\frac{2\pi}{13})=\dfrac{(1-\cos\frac{2\pi}{13})^2}{1+\cos^2\frac{2\pi}{13}}=\dfrac{4\sin^4\frac{\pi}{13}}{1+\cos^2\frac{2\pi}{13}}=4B$

គេមាន $f'(x)=\dfrac{-2(1-x)(1+x^2)-2x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$

$$=\frac{2(1-x)(-1-x^2-x+x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{2(x-1)(x+1)}{(1+x^2)^2}$$

ដោយគ្រប់ $x\in D$ គេមាន $(1+x^2)^2>0$ នោះ $f'(x)$

មានសញ្ញាដូចភាគយក $2(x-1)(x+1)$ ។

មានឫស $x_1=-1$, $x_2=1$ ។

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

តាមតារាងខាងលើយើងបាន $f'(x)<0$ ចំពោះ $x\in(-1,1)$
និង $f'(x)>0$ ចំពោះ $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ ។
នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ $(-1\ ,\ 1)$ ។
គេមាន $\cos\dfrac{2\pi}{11}$ និង $\cos\dfrac{2\pi}{13}$ ស្ថិតនៅចន្លោះ $(-1\ ,\ 1)$ នោះតាមលក្ខណះអនុគមន៍ចុះគេបាន ៖

$$\cos\frac{2\pi}{11}<\cos\frac{2\pi}{13}\Rightarrow f(\cos\frac{2\pi}{11})>f(\cos\frac{2\pi}{13})$$

គេបាន $4A>4B$ នោះ $A>B$ ។

ដូចនេះ $A=\dfrac{\sin^4\dfrac{\pi}{11}}{1+\cos^2\dfrac{2\pi}{11}}>B=\dfrac{\sin^4\dfrac{\pi}{13}}{1+\cos^2\dfrac{2\pi}{13}}$ ។

លំហាត់ទី០៩

ក)ចំពោះគ្រប់ $x>1$ ចូរស្រាយថា $\ln x > \dfrac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$ ។

ខ)ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b} < \dfrac{1}{3}(2\sqrt{ab}+\dfrac{a+b}{2})$

ដែល $a>0, b>0, a\neq b$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក)ចំពោះគ្រប់ $x>1$ ស្រាយថា $\ln x > \dfrac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$ ៖

តាង f ជាអនុគមន៍ កំណត់គ្រប់ $x>1$ ដោយ ៖

$$f(x)=\ln x-\frac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{6x(x^2+4x+1)-3(x^2-1)(2x+4)}{(x^2+4x+1)^2}$

$$=\frac{(x-1)^4}{x(x^2+4x+1)^2}>0 \text{ គ្រប់ } x>1 \text{ ។}$$

ដោយ $f(1)=0$ នោះ $f(x)>f(1)=0$ គ្រប់ $x>1$

ដូចនេះ $\ln x > \dfrac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$ ។

ខ)បង្ហាញថា $\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b} < \dfrac{1}{3}(2\sqrt{ab}+\dfrac{a+b}{2})$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\ln x > \dfrac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$ គ្រប់ $x>1$

គ្រប់ $a>0\,,b>0$ យើងសន្មត $a>b$ ហើយយក $x=\sqrt{\dfrac{a}{b}}>1$

គេបាន $\ln\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)>\dfrac{3\left(\dfrac{a}{b}-1\right)}{\dfrac{a}{b}+4\sqrt{\dfrac{a}{b}}+1}=\dfrac{3(a-b)}{a+b+4\sqrt{ab}}$

ឬ $\dfrac{1}{2}\left(\ln a-\ln b\right)>\dfrac{3(a-b)}{a+b+4\sqrt{ab}}$

ដោយ $a>b$ នោះ $a-b>0$ និង $\ln a-\ln b>0$

គេទាញ $\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b+4\sqrt{ab}}{6}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a+b}{2}+2\sqrt{ab}\right)$

ដូចនេះ $\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{1}{3}(2\sqrt{ab}+\dfrac{a+b}{2})$ ។

✧✧✧✧✧

លំហាត់ទី១០

ចូរប្រៀបធៀបចំនួន $a=\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$ និង $b=2\sqrt[3]{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ប្រៀបធៀបចំនួន $a=\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$ និង $b=2\sqrt[3]{3}$

របៀបទី១ ៖

តាង $x=\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$ និង $y=\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$

គេមាន $x>y$ នោះ $x^2>y^2$

គេបាន $x-y>0$ (1) និង $x^2-y^2>0$ (2)

គុណវិសមភាព (1) និង (2) អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$(x-y)(x^2-y^2)>0$ សមមូល $x^3+y^3\geq x^2y+xy^2$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង 3 គេបាន ៖

$$3(x^3+y^3)>3x^2y+3xy^2=(x+y)^3-(x^3+y^3)$$

គេទាញ $4(x^3+y^3)>(x+y)^3$ ឬ $x+y<\sqrt[3]{4(x^3+y^3)}$ (3)

ជំនួស $x=\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$ និង $y=\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$ ក្នុង (3) គេបាន ៖

$$\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}<\sqrt[3]{4(3-\sqrt[3]{3}+3+\sqrt[3]{3})}=2\sqrt[3]{3}$$

ដូចនេះ $a<b$ ។

របៀបទី២ ៖

ឧបមាថា $a<b$ ពិត

គេបាន $\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}$

សមមូល $\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}}+\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt[3]{3}}{3}}<2$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}$

ដេរីវេ $f'(x)=-\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}$

បើ $f'(x)=0$ សមមូល $-\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}=0$

នាំឲ្យ $\sqrt[3]{(1-x)^2}=\sqrt[3]{(1+x)^2}$ ឬ $1-x=1+x$ នោះ $x=0$ ។

បើ $f'(x)>0$ សមមូល $-\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}>0$

នាំឲ្យ $\sqrt[3]{(1-x)^2}>\sqrt[3]{(1+x)^2}$ ឬ $1-x>1+x$ នោះ $x<0$ ។

តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖

x		0	
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$

តាមតារាងនេះគេបាន $\forall x \neq 0 : f(x) < 2$

យក $x = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ គេបាន $f(\frac{\sqrt[3]{3}}{3}) < 2$ ឬ $\sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt[3]{3}}{3}} + \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{3}} < 2$

ដូចនេះ $a < b$ ។

លំហាត់ទី១១

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $x\in IR$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\frac{a+b}{1+a+b})<f(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b})$

ចំពោះគ្រប់ $a>0,b>0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\frac{a+b}{1+a+b})<f(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b})$

យើងមាន $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $x\in IR$

យើងបាន $f'(x)=\frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{(x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2})}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ដោយ $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$, $\forall x\in IR$

ដូចនេះអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ IR ។

ម៉្យាងទៀតចំពោះគ្រប់ $a>0,b>0$ គេមាន ៖

$\frac{a}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}$ និង $\frac{b}{1+a+b}<\frac{b}{1+b}$

គេទាញ $\frac{a}{1+a+b}+\frac{b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$

ឬ $\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$

ដោយសារតែអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ **IR**

ហេតុនេះតាមលក្ខណះអនុគមន៍កើនគេបាន៖

$$\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$$

នាំឲ្យ $f(\frac{a+b}{1+a+b}) < f(\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b})$

ដូចនេះ $f(\frac{a+b}{1+a+b}) < f(\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b})$

ចំពោះគ្រប់ $a > 0, b > 0$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-3x+1}{3x^2-3x+1}$

កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$f\left(\dfrac{1+a+b}{2}\right) \ge f\left(\dfrac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f\left(\dfrac{1+a+b}{2}\right) \ge f\left(\dfrac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-3x+1}{3x^2-3x+1}$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$

$$f'(x)=\frac{(3x^2+6x-3)(3x^2-3x+1)-(6x-3)(x^3+3x^2-3x+1)}{(3x^2-3x+1)^2}$$

$$=\frac{3x^4-6x^3+3x^2}{(3x^2-3x+1)^2}=\frac{3x^2(x-1)^2}{(3x^2-3x+1)^2}\ \ge 0\ ,\ \forall x\in IR$$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនលើ IR ។

ម៉្យាងទៀតយើងសន្មតថា $\dfrac{1+a+b}{2}\ge\dfrac{1+a+b+ab}{2+a+b}$

គេបាន $\dfrac{2}{1+a+b}\le\dfrac{2+a+b}{1+a+b+ab}$

$$\frac{2}{1+a+b} \le \frac{(1+a)+(1+b)}{(1+a)(1+b)}$$

$$\frac{2}{1+a+b} \le \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}$$

ដោយ $\frac{1}{1+a+b} \le \frac{1}{1+a}$ និង $\frac{1}{1+a+b} \le \frac{1}{1+b}$ គ្រប់ a និង b។

គេទាញ $\frac{2}{1+a+b} \le \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}$

នាំឲ្យ $\frac{1+a+b}{2} \ge \frac{1+a+b+ab}{2+a+b}$ ពិត។

ដូចនេះតាមលក្ខណៈអនុគមន៍កើនគេទាញបាន ៖

$$f\left(\frac{1+a+b}{2}\right) \ge f\left(\frac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$$ ។

✧✧✧✧✧

លំហាត់ទី១៣

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $f(x)=(x+\sqrt{1+x^2})^n$

ដែល $x\in IR$ និង $n\in IN$ ។

ក-ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា ៖

$\sqrt{1+x^2}.f'(x)=n.f(x)$ ។

ខ-ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង ៖

$(1+x^2).f''(x)+x.f'(x)=n^2.f(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាដេរីវេ $f'(x)$

គេបាន $f'(x)=n.(x+\sqrt{1+x^2})'.(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}$

$$f'(x)=n.\left(1+\frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}}\right).(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}$$

$$=n.\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right).(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}$$

$$=n.\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}.(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}$$

$$=\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})^n$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}.(x+\sqrt{1+x^2})^n}$ ។

បង្ហាញថា $\sqrt{1+x^2}.f'(x)=n.f(x)$

គេមាន $f'(x)=\dfrac{n}{\sqrt{1+x^2}}.(x+\sqrt{1+x^2})^n$

ដោយ $f(x)=(x+\sqrt{1+x^2})^n$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{n}{\sqrt{1+x^2}}.f(x)$ នាំឱ្យ $\sqrt{1+x^2}.f'(x)=n.f(x)$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{1+x^2}.f'(x)=n.f(x)}$ ។

ខ-ស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $(1+x^2).f''(x)+x.f'(x)=n^2.f(x)$

គេមាន $\sqrt{1+x^2}.f'(x)=n.f(x)$ នាំឱ្យ $f'(x)=n.\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

គេបាន $f''(x)=n.\dfrac{f'(x)\sqrt{1+x^2}-(\sqrt{1+x^2})'f(x)}{(\sqrt{1+x^2})^2}$

$$f''(x)=n\dfrac{f'(x).\sqrt{1+x^2}-\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}.f(x)}{1+x^2}$$

$$f''(x)=n.\dfrac{\sqrt{1+x^2}.f'(x)-x.\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}\quad(1)$$

$\sqrt{1+x^2}.f'(x)=n.f(x)\ (2)$ និង $\dfrac{1}{n}.f'(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}\ (3)$

យក (2) និង (3) ជួសក្នុងទំនាក់ទំនង (1) គេបាន ៖

ដូចនេះ $\boxed{(1+x^2).f''(x)+x.f'(x)=n^2.f(x)}$ ។

លំហាត់ទី១៤

គេឱ្យអនុគមន៍ $f: IR \to IR$ ដោយ $f(x) = \dfrac{(x^2 - x + 1)^3}{x^6 - x^3 + 1}$ ។

ចូរកេតម្លៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍នេះ ?

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍ $f(x)$

$$f(x) = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^6 - x^3 + 1}$$

យើងសំគាល់ឃើញថា $f(o) = 1$ កំនត់ ។ អនុគមន៍អាចសរសេរ ៖

$$f(x) = \frac{(x + \frac{1}{x} - 1)^3}{x^3 + \frac{1}{x^3} - 1} = \frac{(x + \frac{1}{x} - 1)^3}{(x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x}) - 1}$$

តាង $t = x + \dfrac{1}{x}$ ដែល $|t| \geq 2$ ឬ $t \in]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$

គេបាន $f(x) = g(t) = \dfrac{(t-1)^3}{t^3 - 3t - 1}$ ។

យើងមាន $g'(x) = \dfrac{3(t-1)^2(t^3 - 3t - 1) - 3(t^2 - 1)(t-1)^3}{(t^3 - 3t - 1)^2}$

$$g'(t) = \frac{3(t-1)^2(t^3 - 3t - 1 - t^3 + t^2 + t - 1)}{(t^3 - 3t - 1)^2}$$

$$= \frac{3(t-1)^2(t^2 - 2t - 2)}{(t^3 - 3t - 1)^2}$$

បើ $g'(t) = 0$ គេបាន $t = 1$ ឬ $t^2 - 2t - 2 = 0$

សមមូល $t_1 = 1$; $t_2 = 1+\sqrt{3}$; $t_3 = 1-\sqrt{3}$

ដោយ $t \in]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$ នោះគេទាញ $t = 1+\sqrt{3}$

ដោយ $\frac{3(t-1)^2}{(t^3-3t-1)^2} > 0$ គ្រប់ $t \in]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$

នោះ $g'(t)$ មានសញ្ញាដូច t^2-2t-2 ។

ត្រង់ចំនុច $t = 1+\sqrt{3}$ អនុគមន៍ $g'(t)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

នាំឱ្យ $g(t)$ មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $t = 1+\sqrt{3}$

គឺ $g(1+\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \sqrt{3}(2-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}-3$

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ f គឺ $2\sqrt{3}-3$ ។

លំហាត់ទី១៥

គេឲ្យសមីការ $x^3-2x^2+x-7=0$ មានឫសបីតាងដោយ α,β,γ

ចូរគណនាតម្លៃលេខ $A=\frac{1}{(1-\alpha)^2}+\frac{1}{(1-\beta)^2}+\frac{1}{(1-\gamma)^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃលេខ $A=\frac{1}{(1-\alpha)^2}+\frac{1}{(1-\beta)^2}+\frac{1}{(1-\gamma)^2}$

តាង $f(x)=x^3-2x^2+x-7$ មានឫសបីតាងដោយ α,β,γ ។

គេអាចសរសេរ $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

គេបាន $\ln f(x)=\ln(x-\alpha)+\ln(x-\beta)+\ln(x-\gamma)$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃសមភាពនេះគេបាន ៖

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}$$ ។

ធ្វើដេរីវេម្តងទៀតលើសមភាពនេះគេបាន ៖

$$\frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}=-\frac{1}{(x-\alpha)^2}-\frac{1}{(x-\beta)^2}-\frac{1}{(x-\gamma)^2}$$

យក $x=1$ គេបាន

$$\frac{f''(1)f(x)-[f'(1)]^2}{f^2(1)}=-\frac{1}{(1-\alpha)^2}-\frac{1}{(1-\beta)^2}-\frac{1}{(1-\gamma)^2}$$

គេទាញបាន $A=-\frac{f''(1)f(1)-[f'(1)]^2}{f^2(1)}$ ។

គេមាន $f(1)=1-2+1-7=-7$

$f'(x)=3x^2-4x+1$ នោះ $f'(1)=3-4+1=0$

ហើយ $f''(x)=6x-4$ នោះ $f''(1)=6-4=2$

គេបាន $A=-\dfrac{(2)(-7)-0^2}{(-7)^2}=\dfrac{2}{7}$

ដូចនេះ $A=\dfrac{1}{(1-\alpha)^2}+\dfrac{1}{(1-\beta)^2}+\dfrac{1}{(1-\gamma)^2}=\dfrac{2}{7}$ ។

លំហាត់ទី១៦

គេឲ្យអនុគមន៍ **f** កំណត់ដោយ ៖

$$f_m(x) = x^3 - (m+4)x^2 + 2(2m+3)x - 4m + 3$$

មានក្រាប (c_m) (**m** ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រពិត) ។

ចូរកំណត់សមីការបន្ទាត់ថេរ (Δ) មួយដែលប៉ះនឹងខ្សែកោង (c_m) ជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ **m** ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់សមីការបន្ទាត់ថេរ (Δ)

គេមាន $f_m(x) = x^3 - (m+4)x^2 + 2(2m+3)x - 4m + 3$

តាង $(\Delta) : y = \alpha x + \beta$ ជាបន្ទាត់ថេរដែលប៉ះនឹង (c_m) ត្រង់ចំនុច $M_o(x_0, y_0)$ ចំពោះគ្រប់ $m \in IR$ ។

សមមូលគេបាន $\begin{cases} f(x_0) = \alpha x_0 + \beta \\ f'(x_0) = \alpha \end{cases}$

ដោយ $f'(x) = 3x^2 - 2(m+4)x + 2(2m+3)$

គេបាន $\begin{cases} x_0^3 - (m+4)x_0^2 + 2(2m+3)x_0 - 4m + 3 = \alpha x_0 + \beta \\ 3x_0^2 - 2(m+4)x_0 + 2(2m+3) = \alpha \end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} x_0^3 - 4x_0^2 + 6x_0 - \alpha x_0 - \beta + 3 = m(x_0^2 - 4x_0 + 4) \\ 3x_0^2 - 8x_0 + 6 - \alpha = m(2x_0 - 4) \end{cases}$

ប្រពន្ធ័នេះពិត $\forall m \in IR$ លុះត្រាតែ ៖

$$\begin{cases} x_0^3 - 4x_0^2 + 6x_0 - \alpha x_0 - \beta + 3 = 0 & (1) \\ x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0 & (2) \\ 3x_0^2 - 8x_0 + 6 - \alpha = 0 & (3) \\ 2x_0 - 4 = 0 & (4) \end{cases}$$

តាមសមីការ (2)និង(4) គេទាញបាន $x_0 = 2$ ។

តាមសមីការ (3) គេបាន $3(2)^2 - 8(2) + 6 - \alpha = 0$ នាំឲ្យ $\alpha = 2$

តាម (1) គេបាន $8 - 16 + 12 - 4 - \beta + 3 = 0$ នាំឲ្យ $\beta = 3$ ។

ដូចនេះ $(\Delta) : y = 2x + 3$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{(3m+1)x+m-m^2}{x+m}$

ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង $m\neq 0$ ។ (H_m) ជាក្រាបតាង f ។

ក/ចូរស្រាយថា f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើដែនកំណត់របស់វា។

ខ/កំណត់សមីការបន្ទាត់នឹងមួយដែលប៉ះ(H_m) ជានិច្ចគ្រប់ m។

ដំណោះស្រាយ

ក/ស្រាយថា f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើដែនកំណត់របស់វា

គេមាន $f(x)=\dfrac{(3m+1)x+m-m^2}{x+m}$

ដែនកំណត់ $D_f=IR-\{-m\}$

ដេរីវេ ៖

$$f'(x)=\frac{(3m+1)(x+m)-(3m+1)x-m+m^2}{(x+m)^2}$$

$$=\frac{(3m+1)x+3m^2+m-(3m+1)x-m+m^2}{(x+m)^2}$$

$$=\frac{4m^2}{(x+m)^2}>0\ \forall x\in D_f\ ;\ m\neq 0$$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើនលើដែនកំណត់ D_f ។

ខ/កំណត់សមីការបន្ទាត់នឹងមួយដែលប៉ះ(H_m)ជានិច្ចគ្រប់ m៖

តាង $(d): y = ax + b$ ជាបន្ទាត់ដែលត្រូវរក ។

សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាង (d) និង (H_m)

$$\frac{(3m+1)x + m - m^2}{x+m} = ax + b$$

$$(x+m)(ax+b) = (3m+1)x + m - m^2$$

$$ax^2 + (am+b)x + bm = (3m+1)x + m - m^2$$

$$ax^2 + (am - 3m + b - 1)x + (bm - m + m^2) = 0 \quad (1)$$

ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់ (d) ប៉ះនឹង (H_m) លុះត្រាតែសមីការ(1)មានឫស ឌុបចំពោះគ្រប់តម្លៃ m ពោលគឺ $\Delta = 0$ គ្រប់ m ។

$$\Delta = (am - 3m + b - 1)^2 - 4a(bm - m + m^2)$$

$$= (a^2 - 10a + 9)m^2 - 2(a+3)(b-1)m + (b-1)^2$$

$\forall m \in IR : \Delta = 0$ សមមូល $\begin{cases} a^2 - 10a + 9 = 0 \\ (a+3)(b-1) = 0 \\ (b-1)^2 = 0 \end{cases}$

គេទាញបាន $a = 1, b = 1$ ឬ $a = 9$, $b = 1$ ។

ដូចនេះ $(d_1): y = x + 1$ និង $(d_2): y = 9x + 1$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឲ្យអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ កំណត់ដោយ ៖

$\mathbf{f\ (x)=\frac{(2m+1)x^2-(m^2-1)x+4}{x}}$ មានក្រាបតំនាង $\mathbf{(c_m)}$

($\mathbf{m}$ ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង $\mathbf{m\neq-\frac{1}{2}}$) ។

ក/កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប$\mathbf{(c_m)}$ ។

ខ/កំណត់សមីការប៉ារ៉ាបូលនឹង$\mathbf{(P)}$ មួយដែលប៉ះនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប$\mathbf{(c_m)}$ជានិច្ចគ្រប់ $\mathbf{m}$ ។ ចូរសង់ $\mathbf{(P)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក/កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប$\mathbf{(c_m)}$

គេមាន $\mathbf{f\ (x)=\frac{(2m+1)x^2-(m^2-1)x+4}{x}}$

គេបាន $\mathbf{f(x)=(2m+1)x-m^2+1+\frac{4}{x}}$ ដោយ $\mathbf{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}=0}$

ដូចនេះបន្ទាត់ $\mathbf{(d):y=(2m+1)x-m^2+1}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតរបស់ខ្សែកោង$\mathbf{(c_m)}$ តាង $\mathbf{f}$ ។

ខ/កំណត់សមីការប៉ារ៉ាបូលនឹង$\mathbf{(P)}$ ៖

តាង $\mathbf{(p):y=ax^2+bx+c}$ ជាប៉ារ៉ាបូលនឹងដែលត្រូវរក ។

សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាង $\mathbf{(P)}$ និង $\mathbf{(d)}$ ៖

$\mathbf{ax^2 + bx + c = (2m+1)x - m^2 + 1}$

$\mathbf{ax^2 + (b - 2m - 1)x + m^2 + c - 1 = 0 \ \ (1)}$

ដើម្បីឲ្យ **(d)** ប៉ះនឹង **(P)** ជានិច្ចគ្រប់ **m** លុះត្រាតែសមីការ **(1)** មានឫសឌុបជានិច្ចគ្រប់ **m** ពោលគឺគេត្រូវឲ្យ $\mathbf{\Delta = 0}$ គ្រប់ **m**។

គេមាន $\mathbf{\Delta = (b - 2m - 1)^2 - 4a(m^2 + c - 1)}$

$\mathbf{\Delta = (b-1)^2 - 4m(b-1) + 4m^2 - 4am^2 - 4ac + 4a}$

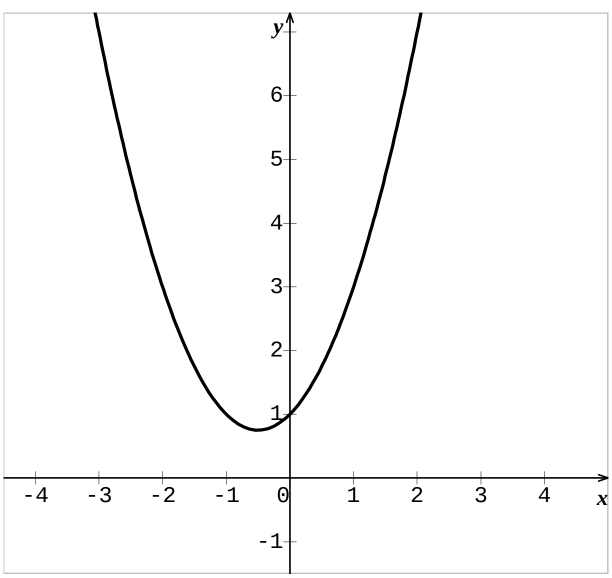
$\mathbf{\Delta = (4-4a)m^2 - 4(b-1)m + [(b-1)^2 - 4ac + 4a]}$

ដើម្បីឲ្យ $\mathbf{\Delta = 0}$ គ្រប់ **m** លុះត្រាតែ $\mathbf{\begin{cases} 4 - 4a = 0 \\ b - 1 = 0 \\ (b-1)^2 - 4ac + 4a = 0 \end{cases}}$

គេទាញបាន $\mathbf{a = 1 \ , b = 1 \ , c = 1}$ ។

ដូចនេះ $\mathbf{(P): y = x^2 + x + 1}$ ជាប៉ារ៉ាបូលដែលត្រូវរក ។

សង់ប៉ារ៉ាបូល $\mathbf{(P): y = x^2 + x + 1}$



លំហាត់ទី១៩

គេឲ្យប៉ារ៉ាបូល $(P): y = x^2 - 4x + 5$

ក/កំណត់កូអរដោនេនៃកំពូល និង កំណុំរបស់ (P) រួចសង់ (P) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ។

ខ/គេគូសបន្ទាត់ (d) មួយមានមេគុណប្រាប់ទិស mចេញពីចំណុចនឹង I មួយ ។ បន្ទាត់(d)កាត់ (P) បានពីរចំណុច A និង B ។ កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចនឹង I ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់ប៉ះ (P) ត្រង់ចំណុច A និង B កែងនឹងគ្នាជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ m ។

ដំណោះស្រាយ

ក/កំណត់កូអរដោនេនៃកំពូល និង កំណុំរបស់ (P) ៖

គេមាន $y = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$ ឬ $(x-2)^2 = y - 1$ ។

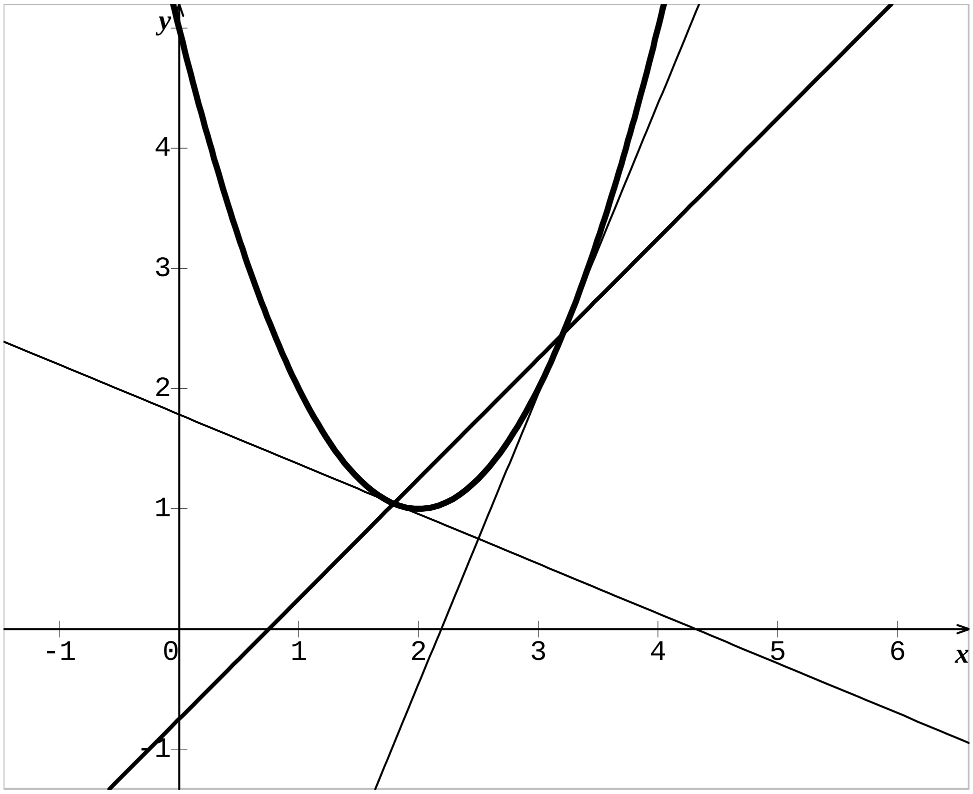
ដោយប្រៀបធៀបជាមួយសមីការ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

គេទាញ $h = 2\ , p = \frac{1}{4}\ , k = 1$ ។

ដូចនេះកូអរដោនេកំពូល $S(h, k) = S(2, 1)$

និងកំណុំ $F(h, k+p) = F(2; \frac{5}{4})$ ។

ខ/កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចនឹង I ៖



តាង $\mathbf{I(\alpha,\beta)}$ ជាចំណុចនឹងដែលត្រូវរក ។

សមីការបន្ទាត់ $\mathbf{(d): y = m(x-\alpha)+\beta}$

សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាង $\mathbf{(d)}$ និង $\mathbf{(P)}$ ៖

$\mathbf{x^2 - 4x + 5 = mx - m\alpha + \beta}$ ឬ

$\mathbf{x^2 - (m+4)x + m\alpha - \beta + 5 = 0}$ **(1)**

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ $\mathbf{(P)}$ ត្រង់ $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$ គឺ ៖

$\mathbf{y'_A = 2x_A - 4}$ និង $\mathbf{y'_B = 2x_B - 4}$ ។

ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់ប៉ះ $\mathbf{(P)}$ ត្រង់ចំណុច $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$ កែងនឹងគ្នាជានិច្ច

គ្រប់តម្លៃ $\mathbf{m}$ លុះត្រាតែ $\mathbf{y'_A . y'_B = -1}$ គ្រប់ $\mathbf{m}$ ។

គេបាន $(2x_A - 4)(2x_B - 4) = -1$

$$4x_A x_B - 8(x_A + x_B) + 17 = 0 \quad (1)$$

ដោយ x_A និង x_B ជាឫសនៃសមីការ (1) នោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត

គេបាន $\begin{cases} x_A + x_B = m + 4 & (2) \\ x_A x_B = m\alpha - \beta + 5 & (3) \end{cases}$

យក (2) និង (3) ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$4(m\alpha - \beta + 5) - 8(m + 4) + 7 = 0$

$(4\alpha - 8)m = 4\beta + 5$

សមីការនេះផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់ m លុះត្រាតែ $\begin{cases} 4\alpha - 8 = 0 \\ 4\beta + 5 = 0 \end{cases}$

គេទាញ $\alpha = 2\ ;\ \beta = -\dfrac{5}{4}$ ។ ដូចនេះ $I(2\ ,-\dfrac{5}{4})$ ។

ជំពូកទី៥

លំហាត់អនុវត្តន៍

១-ចូរគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

1/ $y = 3\cos x - \cos^3 x$

2/ $y = \sin^3 x \cos 3x$

3/ $y = \sin 4x \cos^4 x$

4/ $y = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$

5/ $y = \frac{\cos x}{1 - \cos x}$

6/ $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

7/ $y = \frac{1}{2}\tan^2 x + \frac{1}{3}\tan^3 x$

8/ $y = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$

9/ $y = x - \cot x$

10/ $y = \cot^4 x$

២-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

1/ $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

2/ $y = (x^2 - x + 1)e^{-x}$

3/ $y = e^{-x^2}$

4/ $y = x^3 e^{2x}$

5/ $y = (x^2 - x)e^x$

6/ $y = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$

៣-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

1/ $y = \frac{x + \ln x}{x}$

2/ $y = \frac{\ln x}{x^2}$

3/ $y = 1 - x + x\ln x$

4/ $y = \ln\frac{x - 1}{x + 1}$

៤-គេឲ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=x+p+\frac{q}{x-2}$ ដែល $x\neq 2$ ។
កំណត់ពីរចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f មានអប្បបរមាធៀបស្មើ 3 ត្រង់ $x=3$

៥-គេឲ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=x^3+ax^2+bx$
កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f មានបរមាធៀបត្រង់ $x=1$ និង $x=3$ ។

៦-គេឲ្យអនុគមន៍ $y=(x^2+px+q)e^{x-1}$
កំណត់ចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f មានអតិបរមាធៀបស្មើ 3 ត្រង់ $x=1$ ។

៧-គេឲ្យអនុគមន៍ $y=ax^3+bx^2+cx+d$
កំណត់ចំនួនពិត a,b,c,d ដើម្បីឲ្យ f មានអតិបរមាធៀបស្មើ 2 ត្រង់ $x=1$ និងអប្បបរមាធៀបស្មើ -2 ត្រង់ $x=3$ ។

៨-គេឲ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=x^3+px+q$
កំណត់ចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាស្មើ 4 ចំពោះ $x=-1$ ។

៩-គេឲ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
កំណត់ចំនួនពិត a,b,c និង d ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាស្មើ 0 ចំពោះ $x=1$ និងមានតម្លៃអប្បបរមាធៀបស្មើ -4 ចំពោះ $x=3$ ។

១០-គេឲ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ កំណត់ចំនួនពិត a,b,c និង d ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ 1 ចំពោះ $x = 1$ និងមានតម្លៃ អតិបរមាធៀបស្មើ 2 ចំពោះ $x = 2$ ។

១១-គេឲ្យអនុគមន៍ $y = \dfrac{x(1-x^8)}{1-x^2}$ ដែល $x \neq -1$ និង $x \neq 1$ ។

ក)ចូរស្រាយថា $y' = \dfrac{1+x^2-9x^8+7x^{10}}{(1-x^2)^2}$

ខ)ទាញបញ្ជាក់ថា $1+3x^2+5x^4+7x^6 = \dfrac{1+x^2-9x^8+7x^{10}}{(1-x^2)^2}$ ។

គ)ចូររករូបមន្តសម្រាប់គណនា

$S = 1+3x^2+5x^4+7x^6+....+(2n+1)x^{2n}$ ។

១២-គេឲ្យអនុគមន៍ $y = \dfrac{1-x^7}{1-x}$ ដែល $x \neq 1$ ។

ក)ចូរស្រាយថា $y' = \dfrac{1-7x^6+6x^7}{(1-x)^2}$

ខ)ទាញបញ្ជាក់ថា

$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5 = \dfrac{1-7x^6+6x^7}{(1-x)^2}$ ។

គ)ចូរស្រាយបញ្ជាក់ករណីទូទៅ

$1+2x+3x^2+4x^3+...+nx^{n-1} = \dfrac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$ ។

១៣-គេឲ្យអនុគមន៍ $y = \sin x + \cos x$

ក)គណនាដេរីវេ y' និង y''

ខ)ស្រាយបញ្ជាក់តាមកំណើនថា

$$y^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2}) + \cos(x + \frac{n\pi}{2})$$

១៤-គេឲ្យអនុគមន៍ $y = (x-1)e^{3x}$

ក)គណនាដេរីវេ y' និង y''

ខ)ស្រាយបញ្ជាក់តាមកំណើនថា $y^{(n)} = 3^n(x - 1 + \frac{n}{3})e^{3x}$ ។

១៥-មានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x^2 + px + q}{2x^2 + 3x + 4}$

កំណត់តម្លៃ p និង q ដើម្បីឲ្យ f ជាអនុគមន៍ថេរលើ IR ។

១៦-មានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - (m+1)x^2 + (5m-1)x + 2m - 3$$

កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ IR ។

១៧-គេឲ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{mx + 2m - 2}{x + m - 1}$

សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f តាមតម្លៃ នៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ។

១៨-មានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ

$$f(x) = \frac{mx^3}{3} - (m+1)x^2 + (3m+1)x - m + 2$$

កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យ f ជាអនុគមន៍ចុះជានិច្ចលើ IR ។

១៩-គេឲ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{(2m-3)x+5m-6}{x+m}$

សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ទៅតាមតម្លៃផ្សេងៗនៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ។

២០-គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{3x^2+2x+3}{x^2+1}$

ក-គណនាដេរីវេ f' រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា ។

ខ-កំណត់តម្លៃអតិបរមាធៀប និង អប្បបរមាធៀបនៃ f ។

គ-ចូរបញ្ជាក់ចន្លោះដែល f ជាអនុគមន៍កើន និង ចន្លោះដែល f ជាអនុគមន៍ចុះ ។

ឃ-ចូរប្រៀបធៀបចំនួន $A = \dfrac{3\cos^2\frac{\pi}{10}+2\cos\frac{\pi}{10}+3}{1+\cos^2\frac{\pi}{10}}$ និង

$$B = \dfrac{3\cos^2\frac{\pi}{11}+2\cos\frac{\pi}{11}+3}{1+\cos^2\frac{\pi}{11}}$$

២១-គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{(1-x)^2}{1+x^2}$

ដែល $x \in \Re$ ។

ក)គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង សិក្សាសញ្ញារបស់វា ។

ខ)កំណត់តម្លៃអតិបរមាធៀប និង អប្បបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ f

គ)ចូរប្រៀបធៀបចំនួន $A=\dfrac{4\sin^4\frac{\pi}{5}}{1+\cos^2\frac{2\pi}{5}}$ និង $B=\dfrac{4\sin^4\frac{\pi}{7}}{1+\cos^2\frac{2\pi}{7}}$ ។

២២-គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^3}{3x^2-3x+1}$

ដែល $x\in\Re$ ។

ក) គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចទាញថា f ជាអនុគមន៍កើនលើ $\Re$ ។

ខ)បង្ហាញថា f មានអនុគមន៍ច្រាស់មួយតាងដោយ f^{-1} រួចកំណត់ $f^{-1}(x)$ ។

គ)គណនាដេរីវេនៃ $g(x)=f^{-1}(x)$ ។

២៣-គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}$

ដែល $a\neq 0$, $a,b,c,d\in IR$ ។

កំណត់លេខមេគុណ a,b,c និង d ដោយដឹងថា f មានតម្លៃអតិបរមាធៀបស្មើ -1 ចំពោះ $x=1$ និងមានតម្លៃអប្បបរមាធៀបស្មើ 3 ចំពោះ $x=3$ ។

២៤-គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^3+3x}{3x^2+1}$

ដែល $x\in\Re$ ។

ក)ចូរស្រាយថា f ជាអនុគមន៍កើនលើ $\Re$ ។

ខ)បង្ហាញថា f មានអនុគមន៍ច្រាស់មួយតាងដោយ f^{-1} រួច
កំណត់ $f^{-1}(x)$ ។

គ)គណនាដេរីវេនៃ $g(x)=f^{-1}(x)$ ។

២៥-គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x$

ក)គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង សិក្សាសញ្ញារបស់វា ។

ខ)កំណត់តម្លៃអតិបរមាធៀប និង អប្បបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ f

គ)ចូរប្រៀបធៀបចំនួន $A=\dfrac{1}{3}\cos^3\dfrac{\pi}{2\sqrt{7}}-\cos\dfrac{\pi}{2\sqrt{7}}$
និង $B=\dfrac{1}{3}\cos^3\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}-\cos\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ ។

២៦-គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ
$f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x+7$ ដែល $x\in\Re$ ។

ក)គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចដោះស្រាយសមីការ $f'(x)=0$ ។

ខ)ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចបរមាធៀបនៃ f ។

គ)ចូរប្រៀបធៀបតម្លៃ $f(1.123)$ និង $f(1.124)$ រួចតម្លៃ
$f(2.345)$ និង $f(2.346)$ ។

◇◇◇◇◇

ឯកសារយោង

១-សៀវភៅគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ (កំរិតមូលដ្ឋាន) របស់
ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា (បោះពុម្ពឆ្នាំ២០១១)
២-សៀវភៅគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ (កំរិតខ្ពស់) របស់
ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា (បោះពុម្ពឆ្នាំ២០១១)
៣-Calculus single variable